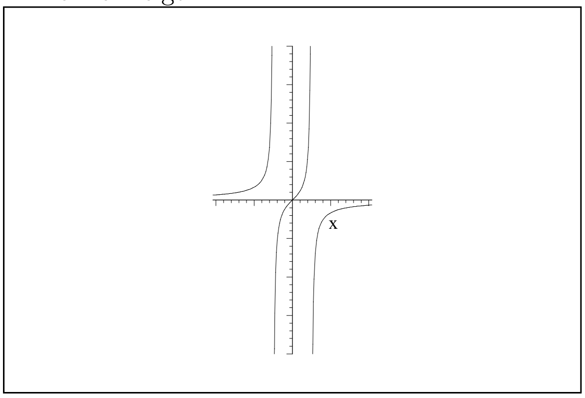
Losungen zur Übung (10)

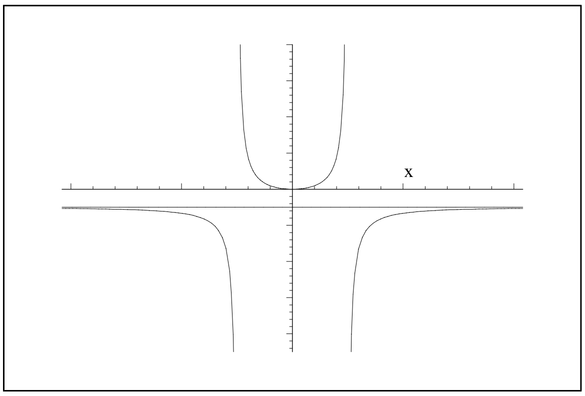
1. Zwei naheliegende Weisen, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ als Hintereinanderschaltung aufzufassen, sind $f(x) = g(h(x))$ mit $h(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, und $f(x) = g_1(h_1(x))$ mit $h_1(x) = \sqrt{1+x^2}$, $g_1(x) = \frac{1}{x}$.

2. Mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ist $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}$.

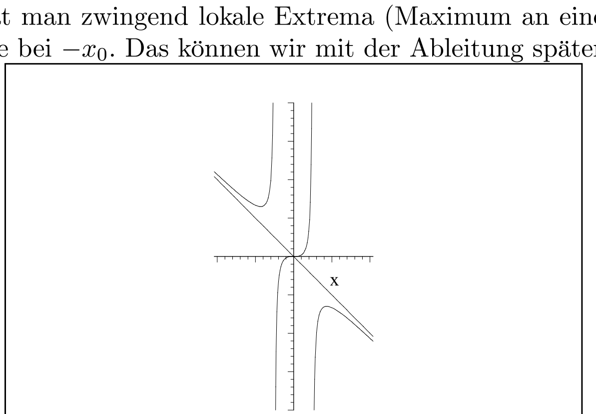
3. Alle drei Funktionen sind gebrochen rational. Die wesentlichen Eigenschaften von $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ sind: Pole an den Stellen $x = \pm 1$, dort ist die Funktion nicht definiert, sonst überall. Wir haben also drei glatte Äste. Die Funktion ist ungerade, bei $x = 0$ ist die einzige Nullstelle. Vorzeichen: Positiv für $0 \leq x < 1$, negativ für $x > 1$. Asymptote $y = 0$ für große $|x|$. Damit ist der Graph klar unter Beachtung der Symmetrie. Es ergibt sich kein Extremum, und es gibt auch tatsächlich keines. Man kann das auch leicht zeigen ohne die Ableitung: Im Bereich $0 \leq x < 1$ ist f offenbar streng monoton steigend, im Bereich > 1 ebenfalls, da mit $1 < x_1 < x_2$ auch $x_1\left(1 - x_2^2\right) < x_2\left(1 - x_1^2\right)$; denn mit $x_1 < x_2$ ist auch $x_1^2 < x_2^2$ und also $1 - x_2^2 < 1 - x_1^2$. Der Graph sieht so aus - Steigung bei $x = 0$ ist 1, wie auch Vernachlässigen von x^2 im Nenner zeigt.



Bei $g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ haben wir offenbar eine gerade Funktion, dieselben Pole, positives Vorzeichen bei $0 \leq x < 1$ und negatives für $x > 1$, Asymptote für große $|x|$ ist $y = -1$. Zwingend ist das (einzige) lokale Extremum (lokales Minimum) bei $x = 0$. Der Graph sieht so aus:

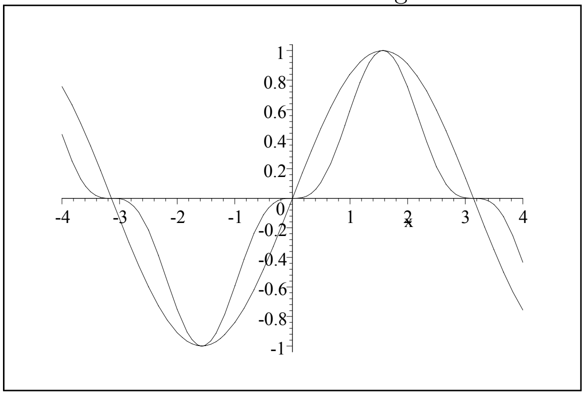


$k(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ist ungerade Funktion, wieder dieselben Pole, einzige Nullstelle $x = 0$. Dort setzt sich der Sattel von x^3 durch. Asymptote für große $|x|$ ist $y = -x$, Vorzeichen: Wie im ersten Beispiel bei f, wegen des Umbiegens vom Pol zur Geraden $y = -x$ hat man zwingend lokale Extrema (Maximum an einer Stelle $x_0 > 1$, Minimum entsprechend auf der andern Seite bei $-x_0$. Das können wir mit der Ableitung später ausrechnen. Graph:

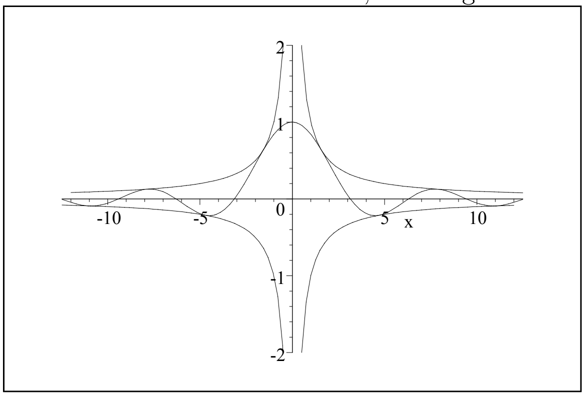


4. Für $\sin|x|$ hat man nur den Sinusgraphen im Bereich $x \geq 0$ an der $y-$ Achse zu spiegeln, also gerade Funktion, und es gibt eine Ecke bei $x = 0$ wie bei $g(x) = |x|$. Für $|\sin(x)|$ hat man dagegen alle ins Negative weisenden Buckel der Sinuskurve nach oben zu spiegeln, so dass an allen Nullstellen solche Ecken entstehen. Die Funktion ist ebenfalls gerade. Bei $\sin\left(x^2\right)$ hat man offenbar eine gerade Funktion, die Oszillation wird auf beiden Seiten der $y-$ Achse nach außen immer schneller. Wie bei sin findet die Oszillation zwischen -1 und 1 statt, bei $x = 0$

ist ein glattes lokales Minimum. Man vergleiche noch einmal mit der schon gesehenen gänzlich anderen Funktion $\sin^2(x)$, die wie eine normale Sinusschwingung aussieht. $\sin^3(x)$ ist ungerade, aber aus allen Nullstellen von sin werden Sättel (wir wissen bereits, dass sin um $x = 0$ wie $y = x$ aussieht, also $\sin^3(x)$ wie x^3, und das wiederholt sich ständig. Ansonsten Oszillation zwischen -1 und 1 wie bei sin, die Extremstellen bleiben dieselben. Man kann noch elementar die Feinheit bemerken, dass die Buckel schmaler sind als bei sin, weil für Zahlen $0 < x < 1$ gilt, dass x^3 bedeutend kleiner ist als x. So sieht das aus - zum Vergleich ist sin mit eingezeichnet:

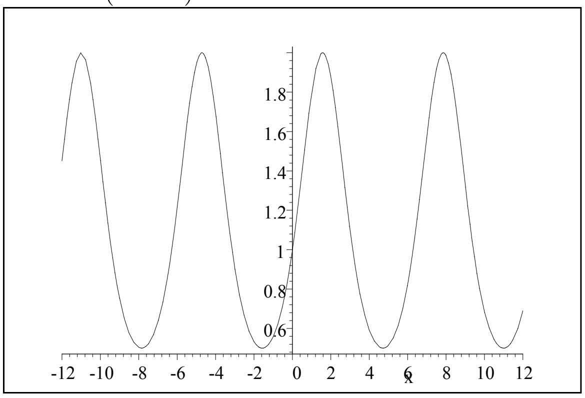


$\frac{1}{x}\sin(x)$ (gerade Funktion!) hat $\pm\frac{1}{x}$ als Hüllkurven, die offenbar überall dort berührt werden, wo sin den Wert 1 bzw. -1 hat. Die Oszillation findet ansonsten gleichmäßig statt, nur eben mit zu beiden Seiten abnehmender Amplitude, man nähert sich immer mehr der Konstanten Null. Bei $x = 1$ hat man, wie aus Vorlesung bekannt, den Grenzwert 1, dort ist ein lokales Maximum. So sieht das aus, mit eingezeichneten Hüllkurven:



Mit $e^{-x}\sin(x)$ oder auch $\frac{1}{x^2}\sin(x)$ hat man (im ersten Fall nur für wachsende x) schneller abfallende Hüllkurven, allerdings hat $\frac{1}{x^2}\sin(x)$ bei $x = 0$ einen Pol, was man mit $\frac{1}{1+x^2}\sin(x)$ vermiede. Mit $x\sin(x)$ hat man das 'Aufschaukeln', wie es im Resonanzfall tatsächlich zu beobachten ist.

5. Zu $2^{\sin(x)}$ überlegen wir, dass die Werte oszillieren zwischen $2^{-1} = \frac{1}{2}$ und $2^1 = 2$. Minima und Maxima liegen an denselben Stellen wie bei sin, da die äußere Funktion streng monoton steigend ist. Von sin wird die Periodizität geerbt. Die oberen Buckel sehen schmaler (steiler) aus als die unteren:



6. $h(x) = M - e^{-x}$ ist eine solche Transformation. Wie schnell man sich dem Schwellenwert nähert, kann man noch steuern durch einen Parameter $\beta > 0$ und bilden: $h_\beta(x) = M - e^{-\beta(x)}$

7. Die vorgeschriebene graphische Gestalt kann am einfachsten mit einer linearen Transformation von $\frac{1}{x^2}$ erreicht werden, also mit $1 + \frac{1}{(x-1)^2}$.

8. Zu lösen ist die Gleichung $3^{t/2} = 100$ mit $\frac{t}{2}\ln 3 = \ln(100)$, also $t = \frac{2\ln(100)}{\ln(3)} \approx 8.38$.

9. $\log_3(2x+1) = 5$ bedeutet gleichwertig $\ln(2x+1) = 5\ln(3)$, also $2x + 1 = e^{5\ln(3)}$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{5\ln(3)} = 121$. $3^{-3x+4} = 100$ ist gleichwertig zu $(-3x+4)\ln(3) = \ln(100)$, also $x = \frac{4}{3} - \frac{\ln(100)}{3\ln(3)}$.

10. f hat einen zur Geraden $x = a$ spiegelsymmetrischen Graphen genau dann, wenn $g(x) = f(x+a)$ eine gerade Funktion ist, also wenn gilt für alle $x : f(-x+a) = f(x+a)$. Der Graph von f liegt punktsymmetrisch zum Punkt (a, b) genau dann, wenn die Funktion $h(x) = -b + f(x+a)$ ungerade ist, d.h. wenn für alle x gilt: $-b + f(-x+a) = -(-b + f(x+a)) = b - f(x+a)$. Oder: $f(-x+a) = 2b - f(x+a)$.