Lösungen zu Übung (9)

1. $-1+j\sqrt{3}=2e^{2j\pi/3}$, also $\left(-1+j\sqrt{3}\right)^{15}=2^{15}e^{10j\pi}=2^{15}$.

2. Eine dritte Wurzel von $j=e^{j\pi/2}$ ist $e^{j\pi/6}=\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}j$, die anderen beiden bekommt man durch Drehen dieser Zahl um den Ursprung mit Winkeln $2\pi/3$ bzw. $4\pi/3$. Es sind daher die Zahlen $e^{j(\pi/6+2\pi/3)}=e^{5j\pi/6}$ und $e^{3j\pi/2}$. Kartesisch: $e^{5j\pi/6}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}j$, $e^{3j\pi/2}=-j$.

3. Der Gesamtwiderstand ist
$$R+\frac{1}{\frac{1}{j\omega L}+j\omega C}=R+\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}=R+j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\text{ (für }\omega\neq 1/\sqrt{LC}\text{).}$$
Beobachten Sie, dass für $\omega=0$ und für $\omega\to\infty$ das Erwartete herauskommt, nämlich $R+j\omega C$ bzw. $R+\frac{1}{j\omega L}$. Für $\omega=1/\sqrt{LC}$ ('Resonanzfrequenz') hat man unendlichen Widerstand!

4. Bei dem System
$$\begin{aligned}(1+j)\,z_1+(2-j)\,z_2&=1\quad I\\ jz_1-(3-j)\,z_2&=0\quad II\end{aligned}$$
handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem. Da der erste Zeilenvektor der zugehörigen Matrix offenbar kein Vielfaches des zweiten ist, gibt es ein eindeutiges Lösungspaar. Die Übertragbarkeit der Resultate von reellen auf komplexe Koeffizienten beruht allein darauf, dass $\mathbb{C}$ ebenso wie $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Eben darauf beruht auch, dass sich am Lösungsverfahren nichts ändert, das wir nunmehr durchführen. Zunächst werfen wir z_1 hinaus:
$$\begin{aligned}((1+j)(-3+j)-j(2-j))\,z_2&=-j\quad(1+j)\,II-jI,\\ z_2&=\frac{j}{5+4j}=\frac{4}{41}+\frac{5}{41}j.\end{aligned}$$
Wir können für solche Systeme im allgemeinen erwarten (wie bei reellen Systemen mit äußeren Parametern), dass sich Einsetzen nicht lohnt, sondern besser die Elimination unabhängig noch einmal für die andere Unbestimmte durchgeführt wird. Aber in unserem Falle ist der sehr einfache Koeffizient bei z_1 in II zu beachten, so dass Einsetzen besser ist:
$$z_1=\frac{(3-j)\,z_2}{j}=-(1+3j)\,z_2=\frac{-1}{41}\left((1+3j)(4+5j)\right)=\frac{11}{41}-\frac{17}{41}j.$$
Beachten Sie, wie in der Rechnung Gebrauch gemacht wird von $\frac{1}{j}=-j$ und vom Ausklammern komplizierterer reeller Faktoren - hier $-\frac{1}{41}$. Die Lösungsmenge ist daher $\left\{\left(\frac{11}{41}-\frac{17}{41}j,\frac{4}{41}+\frac{5}{41}j\right)\right\}$.

5. Die Gleichung $2\cos(\omega t)-3\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t)\cos(\varphi)-A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$ lässt Koeffizienten vergleichen, da die Funktionen cos und sin linear unabhängig sind. Das führt auf die Bestimmungsgleichungen
$$\begin{aligned}A\cos(\varphi)&=2\\ A\sin(\varphi)&=-3.\end{aligned}$$
Somit ist die Aufgabe dieselbe, als hätte man die komplexe Zahl $2-3j$ in Polarform zu bringen, also $A=\sqrt{13}$ und $\varphi=\arctan(-3/2)$. Wir beobachten hier, dass die Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenzen eine einfache lineare Transformation von cos ergibt (natürlich wahlweise auch von sin).

6. Den Graphen der Funktion $f(x)=-2(3x+4)^2$ erhält man aus dem bekannten Graphen der Funktion $h(x)=x^3$, indem man (in dieser Reihenfolge, die für die beiden zuerst genannten Operationen unbedingt einzuhalten ist) folgende geometrischen Operationen ausführt: 1. Verschieben um 4 nach links längs der $x-$ Achse (bei üblicher Orientierung), 2. Stauchen mit Faktor 3 längs der $x-$ Achse ($y-$ Achse bleibt als Zentrum fest), 3. Strecken längs der $y-$ Achse mit Faktor 2 und Spiegeln an der $x-$ Achse. Die Sache sieht also ähnlich aus wie der Graph von $-x^3$, nur liegt die Nullstelle bei $x=-4/3$, und der Anstieg ist steiler. (Der Sattel in der Nullstelle bleibt jedoch.)

7. Die Funktion $g(t)=-4+2\sin(3t-\pi/2)$ stellt eine reine Sinusschwingung dar, nur liegt der Mittelwert bei -4, die Amplitude ist 2 (somit werden alle Werte im Bereich $[-6;-2]$ angenommen und sonst keine). Ferner ist die Kreisfrequenz 3, der Graph also gegenüber dem von sin mit Faktor 3 gestaucht längs der $x-$ Achse. Der Phasenwinkel ist $-\pi/2$, die $y-$ Achse schneidet den Graphen also in einem Minimum. Praktisches Vorgehen: Man sollte eine Sinuskurve grob ein Stück zeichnen und dann passend die Achsen hinzufügen und geeignete Beschriftungen für die wesentlichen Verhältnisse anbringen. Eine Parametrisierung für die Maxima kann man so gewinnen, dass man die (auf die $x-$ Achse bezogenen) geometrischen Operationen auf die Maxima von sin anwendet, also bildet:
$$x(k)=\frac{\pi/2+2k\pi+\pi/2}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$
Andere Möglichkeit: Man setzt $\sin(3t-\pi/2)=0$ und findet
$$3t-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\text{ mit demselben Resultat }t(k)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

8. Wir haben

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,, \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\,,\end{aligned}$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten ergibt

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y)\,,$$

also speziell

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\,.$$

Somit bildet der Graph von $\sin^2$ eine linear transformierte Sinuskurve, es ist der Graph von cos mit Faktor 2 längs der $x-$ Achse zu stauchen, ebenso mit Faktor 2 längs der $y-$ Achse zu stauchen, dann an der $x-$ Achse zu spiegeln und um $\frac{1}{2}$ nach oben zu schieben. Das Resultat kann man einfach so beschreiben: Eine normale Sinusschwingung (also Minima völlig gleich den Maxima gestaltet), nur findet die Oszillation zwischen Null und Eins mit Mittelwert 1/2 statt, bei $x = 0$ liegt ein Minimum, alle Minima in $x(k) = k\pi$, k ganz, alle Maxima in $u(k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k ganz. Der Graph liegt symmetrisch zur $y-$ Achse, $\sin^2$ ist eine gerade Funktion, weil sin eine ungerade Funktion ist.