Übung (8)

1. Zur Berechnung der Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

ersetzen wir die Zeilen (mit Spalten ginge es ebenfalls) II durch $II' = II - I$, III durch $III' = III - II$ und erhalten:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

(Die letzten Zeilen sind gleich, also besteht lineare Abhängigkeit im System der Zeilen.) Die Determinante als Spatprodukt ausgerechnet:

$$(7,8,9) \cdot ((1,2,3) \times (4,5,6)) = (7,8,9) \cdot (-3,6,3) = 3\,(7,8,9)\,(-1,2,1) = 0.$$

Man folgert, dass

$$Bild\,(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

insbesondere ist das Bild zweidimensional, entsprechend der Kern eindimensional. (Als Menge kann man ihn so noch nicht angeben.)

2. Die Gleichgewichtsbedingung lautet mit $\vec{g} = (0,0,-g)$:

$$\begin{aligned} \sum_i (\vec{x}_{P_i} \times m_i \vec{g}) &= \vec{0}. \text{ Aber} \\ \sum_i (\vec{x}_{P_i} \times m_i \vec{g}) &= \sum_i (m_i \vec{x}_{P_i} \times \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \vec{x}_{P_i} \right) \times \vec{g}. \end{aligned}$$

Dies wird aber Null genau dann, wenn die Vektoren $\sum_i m_i \vec{x}_{P_i}$, $\vec{g}$ linear abhängig sind. Also ist $\sum_i m_i \vec{x}_{P_i}$ ein Vielfaches von $\vec{g}$, somit auch der Ortsvektor des Schwerpunktes,

$$\vec{x}_S = \frac{1}{\sum_j m_j} \sum_i m_i \vec{x}_{P_i}, \text{ ein Vielfaches von } \vec{g}.$$

3. Seien g und h parametrisiert durch $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha \vec{a}$, $\vec{x}_h(\beta) = \vec{x}_Q + \beta \vec{b}$, mit linear unabhängigen $\vec{a}, \vec{b}$. Dann ist der Abstand zwischen g und h zu messen als Länge der senkrechten Projektion von $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$. Also

$$\text{Abstand zwischen } g \text{ und } h \; = \left| \frac{(\vec{x}_Q - \vec{x}_P)}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{|\vec{x}_Q - \vec{x}_P|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}.$$

Im Beispiel haben wir $\vec{x}_P - \vec{x}_Q = (3,5,4)$ und $\vec{a} \times \vec{b} = (2,-3,4) \times (2,2,3) = (-17,2,10)$, also mit $(3,5,4) \cdot (-17,2,10) = -1$ und $(-17,2,10) \cdot (-17,2,10) = 393$ den Abstand $\sqrt{393}/393$.

4. (a) $|z_1| = |2 - 3j| = \sqrt{13}$, $|z_2| = |-4 + 2j| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, also

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{65}}{10}.$$

(b) $2 - 3j - (-4 + 2j) = 6 - 5j$, $(2 - 3j)(-4 + 2j) = -2 + 16j$,

$$\frac{2 - 3j}{-4 + 2j} = \frac{1}{2} \frac{(2 - 3j)(-2 - j)}{5} = -\frac{7}{10} + \frac{2}{5} j.$$

Davon der Betrag ist $\frac{1}{10}\sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}/10$.

(c) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$.

5. $-2e^{-5j\pi/2} = 2e^{-3j\pi/2} = 2e^{j\pi/2} = 2j$, $3e^{7j\pi/4} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2} j \sqrt{2}$, $4e^{-8j\pi/3} = -2 - 2j\sqrt{3}$.

6. $-3 - 3j = 3\sqrt{2} e^{5j\pi/4}$, $1 + \sqrt{3} j = 2e^{j\pi/3}$. Dagegen kann man nur darstellen: $-2 + 3j = \sqrt{13} e^{j(\pi + \arctan(-3/2))}$, weil eben der Winkel sich hier nicht in einfacher Weise als Vielfaches von π ausdrückt.

7. Beim Lösen der Gleichung $\frac{1+3j}{2-zj} = 1 - j$ in $\mathbb{C}$ mache man sich zunächst klar: z ist die Unbekannte - eine komplexe Zahl. Insbesondere missverstehe man den Nenner nicht als kartesische Endform - sonst wird man unweigerlich die Unlösbarkeit der Gleichung feststellen, was in $\mathbb{R}$ ja auch stimmt. Nun denke man daran, dass man mit komplexen Zahlen ebenso rechnen kann wie mit reellen, daher gilt alles Bekannte auch für das Lösen von linearen Gleichungen, und dies hier ist eine lineare Gleichung in z, sobald wir die ursprüngliche Gleichung mit $2 - zj$ multipliziert haben zur gleichwertigen:

$$1 + 3j = (2 - zj)(1 - j).$$

An Endform denken: Faktor mal z = Konstante, also

$$\begin{aligned} 1 + 3j - 2 + 2j &= z(-1 - j) \text{ oder} \\ z &= \frac{1 - 5j}{1 + j} = \frac{(1 - 5j)(1 - j)}{2} = -2 - 3j. \end{aligned}$$

(Beim Ausrechnen von Produkten sofort Realteil und Imaginärteil jeweils zusammenfassen.)