Lösungen zu Übung (7)

1. Mit $\vec{x}_P = (1, -2, 3)$ und $\vec{a} = (1, 2, -4)$ hat man sofort die folgende Normalenform für die Ebene E im $\mathbb{R}^3$, welche durch P geht und auf $\vec{a}$ senkrecht steht:
$$x + 2y - 4z = -15.$$
(Linke Seite: Die Koeffizienten sind die Komponenten von $\vec{a}$. Rechte Seite: Bilde $\vec{x}_P\vec{a}$.

2. Mit $\vec{x}_P = (1, 2, -2)$, $\vec{x}_Q = (3, 4, -1)$, $\vec{x}_R = (2, 3, -2)$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks PQR:
$$\frac{1}{2}\left|(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)\right| = \frac{1}{2}\left|(2, 2, 1) \times (1, 1, 0)\right| = \frac{1}{2}\left|(-1, 1, 0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$
Eine Normalenform für die Ebene durch P, Q, R:
$$-x + y = 1$$

3. $\vec{a} \times \left(3\vec{b} - 5\vec{a} + 4\vec{c}\right) - \vec{c} \times (3\vec{a}) = 3\vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{a} \times \vec{c} = 3\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right).$

4. Es sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren. Dann hat man:
$$3\vec{c}\left(-4\vec{b} \times 5\vec{a}\right) = 60\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 60\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$
Damit (eindeutig!) $\alpha = 60$, weil nach Voraussetzung $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq 0$. Für ein linear abhängiges System kommt mit jeder Zahl α Null auf beiden Seiten heraus. Die Lösungsmenge ist daher $\mathbb{R}$.

5. Es herrsche (ausschließlich) eine überall konstante Schwerebeschleunigung $(0, 0, -g)$, $g > 0$. Wir wollen den Vektor als multipliziert mit der Einheitsmasse als Kraftvektor zweckmäßig verstehen. Es sei E eine ('schiefe') Ebene, welche senkrecht auf dem Vektor $(2, 3, 1)$ steht.
   (a) $(0, 0, -g) = \lambda\,(2, 3, -1) + \vec{p}$, mit Bezeichnung $\vec{p}$ für die (Vektor-) Komponente parallel zu E. Anmultiplizieren von $(2, 3, -1)$ ergibt
   $$\lambda = \frac{g}{14}.$$
   Damit $\vec{p} = (0, 0, -g) - \frac{g}{14}(2, 3, -1) = \frac{g}{14}(-2, -3, -13)$. Beachten Sie, und prüfen Sie nach: Tatsächlich liegt $\vec{p}$ parallel zu E, d.h. senkrecht zu $(2, 3, -1)$.
   (b) Ein auf E aufgesetzter Gegenstand rutscht also in Richtung $\vec{p}$ oder bequemer $-(2, 3, 13)$ hinunter.
   (c) Eine Skizze lehrt, dass diese Richtung auch zu bekommen ist mit
   $$(2, 3, -1) \times ((0, 0, -g) \times (2, 3, -1)) = -g\,(2, 3, 13).$$
   (Dass man auch das richtige Vorzeichen hat, wird von der Beachtung der Orientierung erzeugt.)

6. Wir brauchen für das Gleichgewicht $\vec{x}_P \times \vec{K} + \vec{D} = \vec{0}$ (Achtung, nicht den häufig zu beaobachtenden Fehler machen, $\vec{x}_P \times \vec{K}$ gleich $\vec{D}$ zu setzen!). D.h. $\vec{x}_P \times \vec{K} = -\vec{D}$. Das ist bei $\vec{D} \neq \vec{0}$ nur dann möglich, wenn $\vec{x}_P$ und $\vec{K}$ linear unabhängig sind und beide senkrecht zu $\vec{D}$ gewählt werden. In diesem Rahmen gibt es jedoch viele Lösungen: Man kann $\vec{x}_P$ und $\vec{K}$ senkrecht zueinander wählen und auf verschiedene Weisen die Beträge verteilen, so dass als Produkt der Beträge $\left|\vec{D}\right|$ herauskommt, und man kann ein solches Rechteck aus $\vec{x}_P$ und $\vec{K}$ erzeugt noch beliebig scheren, um weitere Lösungen zu bekommen.

7. (a) (Skizze!) Der Flächeninhalt des von $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist
   $$F = \left|\vec{b} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right| |\vec{a}|.$$
   (b) Man hat (immer wieder $|\vec{x}|^2 = \vec{x}^2$ benutzen und distributiv mit dem Skalarprodukt rechnen, dabei sorgfältig auf die benötigten Klammern achten!):
   $$\begin{aligned} F^2 &= \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right)^2 |\vec{a}|^2 = \left(\vec{b}^2 - 2\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{b}\vec{a} + \frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{|\vec{a}|^4}|\vec{a}|^2\right)|\vec{a}|^2 \\ &= \left(\vec{b}^2 - \frac{\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{|\vec{a}|^2}\right)|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2. \end{aligned}$$

(c) Die Gleichung aus (b) gilt für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, man ist die Voraussetzung $\vec{a} \neq \vec{0}$ los, obgleich die Sache natürlich nur für $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig interessant ist. Mit (b) haben wir

$$\begin{aligned} \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 &\geq 0. \text{ Es folgt:} \\ (*) \quad \left|\vec{a}\vec{b}\right| &\leq |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|. \end{aligned}$$

Nun lautet die Dreiecksungleichung

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|.$$

Gleichwertig ist die Ungleichung für die Quadrate:

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 &\leq \left(|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|\right)^2, \text{ d.h.} \\ \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 &\leq |\vec{a}|^2 + 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2. \end{aligned}$$

Dies ist aber gleichwertig zu $\vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$, was mit $(*)$ richtig ist.