Lösungen zu den Aufgaben zum Wochenende (2)

1. (Ausdistribuieren und im Kopf die Glieder zusammenfassen, Symmetrie des Skalarprodukts zusammen mit der Bilinearität nutzen):
$$\vec{a}\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)+3\vec{b}\left(\vec{c}-5\vec{a}\right)=-13\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}+3\vec{b}\vec{c}$$

2.
$$\left|\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{a}-\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|=\left|\left(\vec{a}\vec{b}\right)\left(1-\frac{1}{\vec{a}^2}\right)\vec{a}\right|=\frac{\left|\vec{a}\vec{b}\left(\vec{a}^2-1\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|^2}\left|\vec{a}\right|=\frac{\left|\vec{a}\vec{b}\left(\vec{a}^2-1\right)\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

3. Der Abstand zwischen den Punkten P und Q ist $|\vec{x}_P-\vec{x}_Q|=|(4,1,-3)|=2\sqrt{7}$. Der Winkel zwischen den Ortsvektoren von P und Q ist
$$\arccos\left(\frac{(1,2,-1)\,(-3,1,2)}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right)=\arccos\left(\frac{-3}{2\sqrt{21}}\right)\approx 1.9 \text{ im Bogenmaß,}$$
das macht etwa 109 Grad (man beobachtet den stumpfen Winkel, der dem negativen Vorzeichen des Skalarprodukts entspricht).

4. Der Winkel zwischen einer Geraden g mit Richtungsvektor $(1,2,3)$ und der $xy-$ Ebene ist
$$\arcsin\left(\frac{(1,2,3)\,(0,0,1)}{\sqrt{14}}\right)=\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\approx 0.93 \text{ im Bogenmaß,}$$
das macht etwas mehr als 53 Grad. Aufpunktvektor der Geraden und Schnittpunkt der Geraden mit der $xy-$ Ebene sind völlig gleichgültig, da es nur um die Richtungen geht. Man beachte: Verschiebungen ändern nichts an den Winkeln zwischen den Objekten. Zu beachten ist noch: Nähme man arccos, so ergäbe das den Winkel zwischen g und dem Normalenvektor $(0,0,1)$ der $xy-$ Ebene, so dass man noch den komplementären zu $\pi/2$ zu bilden hätte. Dies vermeidet man, indem man gleich arcsin nimmt.

5. Zur Ebene E, welche durch die Gleichung $2x-3y+z=1$ bestimmt ist:
   (a) Der Abstand zwischen E und dem Ursprung ist $\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$.
   (b) Der Winkel zwischen E und der $x-$ Achse ist
   $$\arcsin\left(\frac{(2,-3,1)\,(1,0,0)}{\sqrt{14}}\right)\approx 0.56 \text{ im Bogenmaß,}$$
   also etwas mehr als 32 Grad.
   (c) Der Winkel zwischen E und der $yz-$ Ebene ist
   $$\arccos\left(\frac{(2,-3,1)\,(0,1,0)}{\sqrt{14}}\right)\approx 2.5 \text{ im Bogenmaß,}$$
   das sind etwa 143 Grad. Beachten Sie: Es gibt stets zwei Winkel zwischen zwei Ebenen, die sich zu π (180 Grad) ergänzen, daher würde man gewöhnlich lieber den kleineren angeben. Dass man gleich den kleineren bekommt, erreicht man, indem man bei negativem Skalarprodukt der Normalenvektoren (wie hier der Fall) gleich zum Betrag übergeht. Tatsächlich ergibt $\arccos\left(3/\sqrt{14}\right)$ den komplementären Winkel, also etwa 37 Grad.
   (d) Den Abstand zwischen E und dem Punkt P kann am bequemsten so ausrechnen, dass man die Gleichung für die parallele Ebene zu E, welche durch P gibt, mittels desselben Normalenvektors formuliert, also $2x-3y+z=-11$. Der Abstand zwischen den Ebenen (und damit der Abstand zwischen E und P ist also $\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}$.
   (e) Der Abstand zwischen E und der Ebene F, welche mit $-4x+6y-2z=10$ beschrieben ist: Wir formulieren die Ebene F mit dem in der Gleichung für E auftretenden Normalenvektor neu: $2x-3y+z=-5$, also ist der Abstand zwischen E und F: $\frac{6}{\sqrt{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{14}$.

6. Wir raten sofort, dass $(m,-1)$ senkrecht auf $(1,m)$ steht. Nun ist $(1,m)$ Richtungsvektor zu g, also $(m,-1)$ ein Richtungsvektor für die gesuchte Geradenrichtung. Ausgedrückt als neue Steigung: $m'=-1/m$. Dafür war es nötig, $m\neq 0$ vorauszusetzen. (Mit den Richtungsvektoren ist die Sache immer korrekt, auch für den Fall $m=0$.)

7. Man hat im $\mathbb{R}^2$ Normalenform für Geraden völlig analog zur Normalenform für Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Wir drücken die gegebenen Gleichungen so aus: $-mx+y=b_0$, $-mx+y=b_1$. Der Normalenvektor ist in beiden Fällen $(-m,1)$. Mit derselben Argumentation wie zum Abstand paralleler Ebenen haben wir dann den Abstand $\frac{|b_1-b_0|}{|(-m,1)|}=\frac{|b_1-b_0|}{1+m^2}$.

8. Denken wir uns $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ als Zeilenvektoren einer Matrix A. Die Bedingungen bedeuten dann zusammen: $A\vec{x} = \vec{0}$. Mit der linearen Unabhängigkeit der $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ hat diese Gleichung nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$, die Lösungmenge ist also $Kern\,(A) = \{\vec{0}\}$. Verallgemeinerung des Resultats: Man könnte auch drei beliebige Zahlen als Resultate der Skalarprodukte vorschreiben und bekäme eindeutige Lösbarkeit.

9. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$. Nun denken wir uns ein beliebiges Parallelogramm durch zwei Kantenvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ erzeugt, dann sind $\vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ Vektoren, die man genau in die Diagonalen einspannen kann. Wenn sie senkrecht aufeinander stehen, so ist $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = 0$, also nach obenstehender Gleichung $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, woraus $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$ folgt. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit dieser Längen über dieselbe Gleichung auch, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.