Lösungen zur Übung (6)

1. Wir überlegen die Bilder der Einheitsvektoren bei der angegebenen Drehung $\vec{f}$ - dazu berücksichtigen wir, dass $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und achten auf die Orientierung:

$$\vec{f}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; \vec{f}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, \; \vec{f}(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Das ergibt die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Man kann erkennen, dass der dritte Zeilenvektor gleich der Summe der beiden ersten ist. Für Fälle, in denen so etwas nicht gleich sichtbar ist, haben wir noch die folgende Möglichkeit: Nullen schaffen durch Zeilenumformungen, dann bekommt man mit $II' = I + 2II$, $III' = II + III$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

offenbar sind nun bereits zwei Zeilen gleich, $III'' = II' - III'$ ergäbe bereits den Nullvektor. Wir wissen damit jedenfalls, dass sich der dritte Zeilenvektor als Linearkombination der beiden ersten darstellen lässt, da jedenfalls die ersten beiden linear unabhängig sind. Dritte Möglichkeit (sie ist für unsere Zwecke hier zu unbequem, würde aber allgemein im Falle der linearen Abhängigkeit dazu führen, dass man einen der Zeilenvektoren konkret als Linearkombination der anderen ausdrücken könnte: Man setzt an

$$(*) \quad \alpha(2,-3,2) + \beta(-3,2,-1) + \gamma(-1,-1,1) = (0,0,0)$$

und erhält das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\alpha - 3\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Lösen ergibt $\gamma = -\alpha$, $\beta = \alpha$, α frei, also ist insbesondere $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ eine Lösung, und daher mit $(*) : (-1,1,1) = (2,-3,2) + (-3,2,-1)$.

(c) Da wir zwei linear unabhängige Zeilen haben, nicht mehr, haben wir dieselben Verhältnisse bei den Spalten, also ist das Bild von A zweidimensional, der Kern von A, d.h. die Lösungsmenge des homogenen Systems (!), daher eindimensional.

(d) Kern(A) ist die Lösungsmenge des homogenen Systems, in parametrisierter Form ist das - man rechne das nach:

$$\vec{x}_L(y) = y \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; y \in \mathbb{R}.$$

(e) Mit (a) ist das ganz einfach: Setze $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann hat $A\vec{x} = \vec{b}$ jedenfalls keine Lösung. Denn wegen der linearen Abhänigkeit der dritten Zeile der Matrix A von den beiden ersten Zeilen können nur $\vec{b}$ der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ im Bilde sein. Tatsächlich liefert dieser Ausdruck sofort eine Parametrisierung von Bild(A).

3. Am bequemsten mit dem Verfahren Nummer 2 aus 2.(a), nur mit Spaltenvektoren (so wäre das Verfahren auch für 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ gut usw. - im speziellen quadratischen Fall könnte man auch die Zeilen nehmen): Wir ersetzen Spalte II durch $(7I + II)/2$, Spalte III durch $6I - III$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 13 & 15 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hier bereits können wir die lineare Unabhängigkeit aller drei Spalten erkennen, da die letzten beiden Spalten offenbar linear unabhängig sind und die erste linear unabhängig von beiden letzten, weil in ihr die dritte Komponente nicht Null ist. Folglich ist A eine bijektive lineare Abbildung, das Bild von A ist $\mathbb{R}^3$ und $\text{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$.

4. Wir setzen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und finden

$$\begin{aligned} B\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{e}_1\right) &= B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\vec{e}_2\right) &= B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-b \\ 3c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das ergibt die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a + 2b &= 1 \\ 3a - b &= 0 \end{aligned}$$

(einzige Lösung: $a = 1/7, b = 3/7$) und

$$\begin{aligned} c + 2d &= 0 \\ 3c - d &= 1 \end{aligned}$$

mit der einzigen Lösung $c = 2/7, d = -1/7$. Folglich ist

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das ist die Inverse zu A, sie stellt die Umkehrabbildung zur bijektiven linearen Abbildung A dar, so dass die Hintereinanderschaltung mit A die Identität ergibt. Wir beobachten: Der Vorfaktor $-1/7$ ist der Kehrwert der Determinante von A, und die Einträge auf der Diagonalen von A werden vertauscht, die andern mit (-1) multipliziert. Das gilt allgemein, jede invertierbare $(2 \times 2)-$ Matrix kann man auf diese einfache Weise invertieren. Im Falle höherer Dimensionen hat man kein so einfaches Schema. Es genügte, die Bedingung für die Einheitsvektoren zu erfüllen, da eine Matrix, welche diese auf sich selbst jeweils abbildet, alle Vektoren auf sich selbst abbilden muss, über die Linearkombinationen.

5.

$$|(-45, 15, 30)| = 15\,|(-3, 1, 2)| = 15\sqrt{14}.$$

.

6.

$$\left|\frac{1}{|(1,2,-3)|}(1,2,-3)\right| = \frac{1}{|(1,2,-3)|}\,|(1,2,-3)| = 1.$$

Verallgemeinerung: Für $|\vec{a}| \neq 0$, gleichwertig $\vec{a} \neq \vec{0}$, hat man

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\,|\vec{a}| = 1.$$

7. Wir haben gleichwertig zu zeigen:

$$\begin{aligned} (i)\ \ |\vec{y}| - |\vec{x}| &\leq |\vec{y} - \vec{x}| \ \text{ und} \\ (ii)\ \ |\vec{x}| - |\vec{y}| &\leq |\vec{y} - \vec{x}|\,. \end{aligned}$$

Wir haben (die Ungleichung gilt mit der Dreiecksungleichung):

$$|\vec{y}| = |\vec{x} + (\vec{y} - \vec{x})| \leq |\vec{x}| + |\vec{y} - \vec{x}|\,, \text{ also } (i)\,.$$

Das genügt bereits, da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|\vec{y}| \geq |\vec{x}|$ voraussetzen können (andernfalls brauchen wir nur die Buchstaben zu vertauschen) und damit (ii) banaler Weise gilt. Wir können aber auch dasselbe Spiel noch einmal mit vertauschten Buchstaben machen:

$$|\vec{x}| = |\vec{y} + (\vec{x} - \vec{y})| \leq |\vec{y}| + |\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{y} - \vec{x}|\,, \text{ also } (ii)\,.$$