Lösungen zur Übung (5)

1. Für den Schnitt der Ebene E mit der durch $\vec{x}\,(t) = (1,2,0) + t\,(1,-2,1) + t^2\,(-2,1,-3)\,,\ t \in \mathbb{R}$, parametrisierten Parabel hat man $\vec{x}\,(t)$in die Gleichung $2x - 3y + 2z = -5$ für E einzusetzen. Das ergibt folgende quadratische Gleichung für t:
$$-4 + 10t - 13t^2 = -5, \text{ in Normalform: } t^2 - \frac{10}{13}t - \frac{1}{13} = 0.$$
Die Lösungsformel ergibt in diesem Falle zwei reelle Lösungen $t_{1,2} = \frac{5}{13} \pm \frac{1}{13}\sqrt{38}$. Folglich besteht die Schnittmenge aus den beiden Punkten S_1, S_2 mit $\vec{x}_{S_1} = \vec{x}\,(t_1)$ und $\vec{x}_{S_2} = \vec{x}\,(t_2)$. Es ist verständlich, dass eine quadratische Gleichung entsteht, erwarten wir doch in den 'normalen' Fällen gerade, dass es einen Berührpunkt oder zwei Schnittpunkte oder gar keinen Schnittpunkt gibt. Dazu kommen jedoch noch folgende Fälle: Es könnte die Parabel vollständig in der Ebene liegen, also alle t wären Lösung, oder es könnte die Ebene E nicht parallel zur Parabelebene liegen, aber parallel zur Parabelachse, und die Parabel in genau einem Punkt schneiden. Diesen Fällen entspräche in der Bestimmungsgleichung, dass das Glied mit t^2 fehlt und eine lineare Gleichung entstünde, die eben im Normalfall genau eine Lösung hätte, aber bei Fehlen des Gliedes mit t eben keine Lösung oder alle reellen Zahlen als Lösungen besäße.
Zusatzfrage: Es ist offenbar die Parabelebene zu parametrisieren mit
$$\vec{y}\,(\lambda, \mu) = (1,2,0) + \lambda\,(1,-2,1) + \mu\,(-2,1,-3)\,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Bei dem Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z - u &= 0 \\ -3x + 2y + 3z + 2u &= 0 \\ 2x - 2y - z + u &= 1 \end{aligned}\ .$$
wird man zunächst u eliminieren, es ensteht
$$\begin{aligned} x - 4y + 7z &= 0\ \ (2I + II) \\ 4x - 5y + z &= 1\ \ (I + III)\,. \end{aligned}$$
Elimination von x:
$$11y - 27z = 1\ \ (II' - 4I')\,.$$
Damit ist die Eliminationsphase beendet. Wir setzen z als freien Parameter und finden (Einsetzungsphase):
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{11} + \frac{27}{11}z \\ x &= 4y - 7z = \frac{4}{11} + \frac{31}{11}z \\ u &= 1 - 2x + 2y + z = \frac{5}{11} + \frac{3}{11}z. \end{aligned}$$
Wir haben nunmehr alle Unbestimmten außer z durch den freien Parameter z ausgedrückt. Es folgt die dritte Phase, in der wir die gewonnenen Ausdrücke zu einer Parameterdarstellung der Lösungsmenge zusammenfügen und anschließend 'aufgedröselt' ordentlich aufschreiben:
$$\vec{x}_L\,(z) = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} + \frac{31}{11}z \\ \frac{1}{11} + \frac{27}{11}z \\ z \\ \frac{5}{11} + \frac{3}{11}z \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{z}{11}\begin{pmatrix} 31 \\ 27 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R}.$$
Es handelt sich geometrisch also um eine Gerade im $\mathbb{R}^4$.Selbstverständlich könnte man noch durch Setzen von $\lambda = z/11$ den Richtungsvektor ganzzahlig machen.

3. Man findet zum Gleichungssystem
$$\begin{aligned} (2a+1)x + 2y &= 0 \\ ax + (a-1)y &= 1 \end{aligned}\ .$$
durch Elimination von y:
$$(2a - (a-1)\,(2a+1))\,x = 2.\ \ (2II - (a-1)\,I)$$
Erster Fall: $2a^2 - 3a - 1 \neq 0$:
$$x = \frac{-2}{2a^2 - 3a - 1}.$$

Man würde nun nach üblichem Verfahren diesen Ausdruck für x einsetzen in die erste Gleichung, aber es ist offensichtlich einfacher, y zu bestimmen, indem man x eliminiert aus dem ursprünglichen System:

$$((a-1)(2a+1)-2a)\,y = 2a+1 \ \ ((2a+1)\,II - aI)\,,$$

was wiederum in unserem ersten Falle die eindeutige Lösung hat - beachten Sie, dass bei y derselbe Faktor steht wie zuvor bei x, nur mit anderem Vorzeichen:

$$y = \frac{2a+1}{2a^2-3a-1}.$$

Fazit: Im ersten Fall ist die Lösungsmenge

$$L_a = \left\{ \frac{1}{2a^2-3a-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2a+1 \end{pmatrix} \right\} \text{ für } 2a^2-3a-1 \neq 0.$$

Zu betrachten sind noch die Fälle, in welchen $2a^2-3a-1=0$, also $a_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Es wäre nun höchst ungeschickt, diese fürchterlichen Zahlen in das Gleichungssystem einzusetzen. Stattdessen betrachten wir lediglich die oben nach Elimination gewonnenen Zeilen. Die erste lautet mit einem der Werte $a_{1,2}$: $0x = -2$. Diese Gleichung ist offenbar unlösbar, ein Widerspruch. Daher ist die Lösungsmenge jedenfalls leer für $a_{1,2}$. Also:

$$2.\ \text{Fall: } L_a = \varnothing \text{ für } 2a^2-3a-1=0.$$

4. Die Bedingung

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ergibt ausgeschrieben mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3a-2b \\ 3c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergleich der Komponenten liefert die beiden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{r} a+2b=-3 \\ c+2d=1 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 3a-2b=2 \\ 3c-2d=-4, \end{array}$$

die sich zu einem System von vier Gleichungen für die vier Unbestimmten zusammenfügen, aber zweckmäßig aufgespalten werden in folgende zwei $(2\times 2)-$ Systeme:

$$\begin{array}{r} a+2b=-3 \\ 3a-2b=2 \end{array}, \quad \begin{array}{r} c+2d=1 \\ 3c-2d=-4 \end{array}.$$

Diese löst man leicht und findet

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -11 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vom theoretischen Wissen sollten wir sagen können: Entscheidend war es nur, dass die beiden Urbildvektoren linear unabhängig waren. Dann bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$,und die Vorgabe der Bildvektoren einer Basis definiert stets eindeutig eine lineare Abbildung.

5. Wir lesen ab aus

$$\begin{aligned} \vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2x-3z \\ 3x+4y-z \end{pmatrix}: \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zunächst sollten wir darauf achten, dass die Komponentenfunktionen von $\vec{f}$ wirklich lineare Ausdrücke (im engeren Sinne, also keine Konstanten erlaubt) in x, y, z sind. Anschließend müssen wir nur noch die Koeffizienten ablesen, wie wir das gelernt haben.

6. Erster Weg: Die Spiegelung $\vec{f}$ am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch

$$\vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix},$$

Ablesen wie in der vorigen Aufgabe ergibt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oder aber (zweiter Weg) man stellt fest: $\vec{f}(\vec{e}_i) = -\vec{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$, und schreibt also die negativen Einheitsvektoren als Spalten der Matrix A, offenbar mit demselben Resultat.

7. Analog: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Wir nutzen Indexkalkül. Die Bedingung lautet: $(c_{ij})_{ij}(x_j)_j = (a_{ij})_{ij}(x_j)_j + (b_{ij})_{ij}(x_j)_j$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{ij}(x_j)_j + (b_{ij})_{ij}(x_j)_j &= \left(\sum_j a_{ij}x_j\right)_i + \left(\sum_j b_{ij}x_j\right)_i = \left(\sum_j (a_{ij}+b_{ij})\,x_j\right)_i, \\ (c_{ij})_{ij}(x_j)_j &= \left(\sum_j c_{ij}x_j\right)_i \end{aligned}$$

Also kommen wir auf die Bedingung $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, für alle i, j. Mit anderen Worten: Die Summe der linearen Abbilduungen wird durch die Summenmatrix definiert, $C = A + B$, die wiederum durch komponentenweises Addieren zu definieren ist, wie gerade gesehen.