Lösungen zur Übung (4)

1. Zur Logik noch einmal: Wir suchen die Punkte auf g, die zusätzlich noch auf der angegebenen Ebene liegen. Daher nehmen wir den Ortsvektor $\vec{x}_g(\lambda)$ eines beliebigen Geradenpunktes und unterwerfen ihn noch der Bedingung, dass der zugehörige Punkt auf der Ebene liegt, also haben wir die $x, y, z-$ Koordinaten von $\vec{x}_g(\lambda)$ einzusetzen in die Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$. Das ergibt eine Gleichung mit einer Unbestimmten, λ. Wir erwarten im Normalfall eine eindeutige Lösung, ganz entsprechend dem, was wir vom Schnitt einer Geraden mit einer Ebene im Normalfall erwarten. Durchführung:
$$\begin{aligned} 2(1-2\lambda) - 3(2+\lambda) + 4(3+\lambda) &= 1, \text{ also} \\ -3\lambda &= -7, \ \lambda = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$
Also erhalten wir den Schnittpunkt S in Koordinatendarstellung, indem wir diesen Wert von λ in den Ausdruck $\vec{x}(\lambda)$ einsetzen:
$$\vec{x}_S^K = \vec{x}\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}(-11, 13, 16).$$

2. Es handelt sich inhaltlich um dieselbe Aufgabe wie bei Nr. 1, aber die vorgegebene Ebene ist in Parameterdarstellung gegeben. Zur Logik: Für einen Schnittpunkt S gilt, dass $\vec{x}_S$ sich in der Form $\vec{x}_g(\alpha)$ für einen Wert α und ebenfalls in der Form $\vec{x}_E(\lambda, \mu)$ für irgendwelche Werte λ, μ darstellen lässt. Beachten Sie: Man darf nicht verlangen, dass $\alpha = \lambda$, daher muss man einen neuen Buchstaben wählen. Das führt zur Gleichsetzungsbedingung
$$\vec{x}_E(\lambda, \mu) = \vec{x}_g(\alpha),$$
diese ordentlich hingeschrieben als lineares Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} -2\alpha - \lambda - 2\mu &= 0 \\ \alpha - 2\lambda + \mu &= 0 \\ \alpha + \lambda - 3\mu &= -1 \end{aligned}$$
Nun würde man am liebsten α und λ eliminieren, aber wir denken strategisch ein Stück weiter und eliminieren λ und μ, um noch eine Gleichung für α zu erhalten. Dann brauchen wir nur α einzusetzen in $\vec{x}_g(\alpha)$, um den Schnittpunkt zu bekommen (wir werden sehen, dass hier wiederum der Normalfall besteht):
$$\begin{aligned} \alpha + \mu &= 0 \text{ (2 mal zweite minus erste Zeile), durch 5 geteilt} \\ -\alpha - 5\mu &= -1 \text{ (erste plus 3. Zeile)} \end{aligned}$$
Wir eliminieren μ:
$$4\alpha = -1, \text{ also } \alpha = -\frac{1}{4}.$$
Damit haben wir den Schnittpunkt: $\vec{x}_S = \vec{x}_g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(6, 7, 11)$. Dazu braucht man λ und μ nicht erst auszurechnen. Aber wir können λ, μ noch ausrechnen und der Probe halber sehen, dass deren Einsetzung in $\vec{x}_E(\lambda, \mu)$ auch auf $\vec{x}_S$ führt: Man findet sofort $\mu = \frac{1}{4}$ und $\lambda = 0$, und tatsächlich $\vec{x}_E\left(0, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(6, 7, 11)$.
Wir stellen fest, dass die technische Version von Aufgabe 1 viel bequemer war (eine Gleichung mit einer Unbestimmten statt eines Systems von 3 Gleichungen mit 3 Unbestimmten).

3. $$\begin{aligned} -3x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
ist zu lösen. Wir eliminieren x und finden $5y + 12z = 2$, $y = \frac{2}{5} - \frac{12}{5}z$. Dies ergibt eine Parametrisierung der Lösungsmenge mit z als freiem Parameter:
$$\vec{x}(z) = \frac{1}{5}(-3, 2, 0) + z(13, -12, 5), \ z \in \mathbb{R}.$$
(Wir multiplizierten den Richtungsvektor noch mit 5, um ihn ganzzahlig zu machen.) Dies parametrisiert (in Koordinatenform) eine Gerade, die Schnittgerade der beiden durch die Gleichungen beschriebenen Ebenen.

4. Hier ist die Logik wieder dieselbe wie bei Aufgabe 1: Die Koordinaten eines beliebigen Punktes von F sind in die Gleichung für E einzusetzen, und wir erhalten
$$4\lambda + \mu = 1, \text{ also } \mu = 1 - 4\lambda.$$
λ ist freier Parameter. Diese Lösungsmenge ist einzusetzen in $\vec{x}_F$ (anders als bei Aufgabe 3, dort war die Lösungsmenge des Gleichungssystems die Schnittmenge selbst). Wir erhalten somit die Schnittmenge in parametrisierter Form, benennen die Schnittgerade mit g_S:
$$\begin{aligned} \vec{x}_{g_S} &= \vec{x}_F(\lambda, 1-4\lambda) = (1,2,2) + \lambda(-2,1,1) + (1-4\lambda)(-1,2,3) \\ &= (2\lambda, 4-7\lambda, 5-11\lambda) \\ &= (0,4,5) + \lambda(2,-7,-11). \end{aligned}$$
Wegen der benötigten Einsetzungen ist das unbequemer als die reine Gleichungsform für beide Ebenen, aber noch viel bequemer als das Arbeiten mit zwei Parameterdarstellungen: Das braucht die Lösung eines Gleichungssystems mit 3 Gleichungen und 4 Unbestimmten.

5. Mit $\vec{x}(t) = (1,2,3) + t^3\,(2,-1,2)\,,\ t \in \mathbb{R}$, wird eine volle Gerade durchlaufen, da mit $t \in \mathbb{R}$ auch t^3 alle reellen Zahlen durchläuft. Die Gerade $\vec{y}(\lambda) = (1,2,3) + \lambda\,(2,-1,2)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, wird dabei allerdings nicht gleichförmig, also mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, sondern für große $|t|$ ist die Geschwindigkeit sehr hoch, für t nahe bei Null sehr klein, momentan bei $t = 0$ sogar Null.

6. Die Bahn der Kurve $\vec{y}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)\,,\ t \in \mathbb{R}$, stellt man sich am besten so vor, dass man die Parabel $\left(t, t^2, 0\right)$ in der $xy-$ Ebene betrachtet und den Zweig mit $t < 0$ steil (gemäß t^3) nach unten ('oben' und 'unten' bei naheliegender Anordnung der $z-$ Achse), den Zweig mit $t > 0$ ebenso steil nach oben.

7. Setzt man den Geschwindigkeitsvektor relativ zum Wasser $\vec{s} = (s_1, s_2)$ und den Geschwindigkeitsvektor des Wassers $\vec{v} = (v, 0)\,,\ v \neq 0$, so erhält man die Bedingung $\lambda\,(s_1 + v, s_2) = (0, b)$ für ein $\lambda > 0$. Das bedeutet $s_1 = -v$ und $s_2 > 0$. Insbesondere muss der Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{s}$ größer als der von $\vec{v}$ sein, und die erste Komponente muss genau derjenigen der Wassergeschwindigkeit entgegengesetzt sein.