Übung (3)

1. Man sollte wissen und nutzen, dass es sich um eine Linearkombination der Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ handelt, und die jeweiligen Koeffizienten im Kopf ausrechnen, dabei wieder getrennt die konstanten Glieder und die $\lambda-$ Glieder behandeln:

$$\begin{aligned} & (2+\lambda)\,\vec{x}_1 + (3-\lambda)\,\vec{x}_1 + 4\,(\lambda\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + 5\,((1-\lambda)\,\vec{x}_3 - \vec{x}_2) \\ = \; & (5+4\lambda)\,\vec{x}_1 - 9\vec{x}_2 + (5-5\lambda)\,\vec{x}_3. \end{aligned}$$

2. Diese Aufgabe ist so gemeint, dass man die Darstellungen der gesuchten Vektoren durch $\vec{a}, \vec{b}$ möglichst direkt sehen sollte: $\vec{x} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{z}$ (noch einmal erinnern an die Äquivalenzklassen), auch sehen: $\vec{y} = \vec{a} - \vec{x} =$ (ausrechnen) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$.

3. Wie ist die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{R}^3$ der Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$ ist geometrisch zu deuten als Ebene (lineares Gebilde, Dimension gleich Dimension des Grundraums $\mathbb{R}^3$ minus Eins für die eine Gleichung, macht 2; es gibt keine weitere Beschränkung für die Koordinaten, also kommt eine ganze Ebene heraus). Das bestätigt sich mit der Parameterdarstellung, die man nach Auflösen der Gleichung nach x erhält: $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y - 2z$. Wir wählen y, z als freie Parameter und erhalten folgende Parametrisierung, bei der die fragliche Ebene mit E bezeichnet ist:

$$\vec{u}_E\,(y,z) = \frac{1}{2}\,(1,0,0) + y\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) + z\,(-2,0,1)\,,\; y, z \in \mathbb{R}.$$

Nunmehr können wir auch eine Parametrisierung aufschreiben, bei der die Parameter mit griechischen Buchstaben bezeichnet sind und die Richtungsvektoren ganzzahlig gewählt:

$$\vec{a}_E\,(\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\,(1,0,0) + \lambda\,(3,2,0) + \mu\,(-2,0,1)\,,\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie: Das ist eine *andere* Parametrisierung *derselben* Ebene. Geben Sie für L eine Parameterdarstellung in Koordinatenform. Die Deutung gilt auch für nicht kartesische Koordinatensysteme, nur kann man dann nicht mehr sagen, dass der Schnittpunkt der Ebene mit der $x-$ Achse in der Entfernung $\frac{1}{2}$ vom Ursprung liegt.

4. Es sei die Gerade g im E^3 gegeben durch $\vec{x}_g\,(\lambda) = (1,2,-1) + \lambda\,(3,-1,2)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, ferner der Punkt P mit $\vec{x}_P = (2,1,1)\,.$ Es sei weiter die Ebene E dadurch bestimmt, dass g in E liegt und P auf E liegt.

   (a) Hier ist eine naheliegende Parameterdarstellung für E:

   $$\vec{x}_E\,(\lambda,\mu) = (2,1,1) + \lambda\,(3,-1,2) + \mu\,(1,-1,2)\,,\; \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

   Als Aufpunktvektor hätte man auch ebenso gut $(1,2,-1)$ wählen können. Als einen Richtungsvektor wählten wir naheliegend den der Geraden g, als den zweiten den Differenzvektor $(2,1,1) - (1,2,-1)$

   (b) Die Bedingung lautet offenbar: $Q \notin h$, damit es genau eine Ebene F gibt, welche Q und h enthält. Genau dann führt die Bildung des Differenzvektors $\vec{x}_Q-$ Aufpunktvektor der Geraden h zu einem vom Richtungsvektor von h linear unabhängigen Vektor.

5. (a) Im $\mathbb{R}^2$ ist die Lösungsmenge von $2x - 3y = 1$ ein eindimensionales lineares Gebilde, also mangels beschränkender Angaben eine Gerade, die wir auch etwa in Parameterform bringen können. In der Grundmenge $\mathbb{R}^3$ dagegen bekommt man eine Ebene E senkrecht zur $xy-$ Ebene, welche die letztere in der oben erwähnten Geraden schneidet. Zu parametrisieren wäre diese Ebene E etwa so:

   $$\vec{x}_E\,(\lambda,\mu) = \left(\lambda, \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}, \mu\right) = -\frac{1}{3}\,(0,1,0) + \lambda\left(1, \frac{2}{3}, 0\right) + \mu\,(0,0,1)\,,\; \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

   (b) Im $\mathbb{R}^3$ ist die Lösungsmenge von $2x^2 + y^2 = 1$ ein zweidimensionales nichtlineares Gebilde, also eine gekrümmte Fläche, und man erkennt leicht, dass diese Fläche so entsteht, dass man die Ellipse - nur die Kurve! - (achsenparallel in der $xy-$ Ebene) mit Mittelpunkt im Ursprung und Halbachsenlängen $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ (in $x-$ Richtung) und 1 (in $y-$ Richtung) beliebig längs der $z-$ Achse verschiebt. Im $\mathbb{R}^2$ wird durch dieselbe Gleichung nur die erwähnte Ellipsenkurve beschrieben.

   (c) Im $\mathbb{R}^3$ ist mit der Gleichung $z = x^2 + y^2$ eine gekrümmte Fläche beschrieben. Genauer handelt es sich um die Oberfläche eines Paraboloids, und sie entsteht, indem man die Parabel $z = y^2$ in der $yz-$ Ebene um die $z-$ Achse rotieren lässt.

6. (a) $\vec{x}\,(\lambda) = \left(\lambda, \lambda, \lambda^2\right)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$: Damit ist eine gekrümmte Kurve beschrieben. Genauer handelt es sich um eine Parabel, deren Achse die $z-$ Achse ist und deren senkrechte Projektion auf die $xy-$ Ebene die Gerade g ist, welche mit $\vec{y}_g\,(\lambda) = (\lambda,\lambda,0)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, parametrisiert ist. Man kann noch feststellen, dass die hier beschriebene Parabel kongruent ist zur Parabel $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$.

   (b) $\vec{y}\,(\lambda,\mu) = \left(\lambda, \lambda^2, \mu\right)\,,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$: Es handelt sich um eine gekrümmte Fläche, und zwar wird die Parabel $\left(\lambda, \lambda^2, 0\right)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$, beliebig längs der $z-$ Achse verschoben. Die Beschränkung $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ bewirkt, dass nur ein endliches Stück aus dieser Fläche ausgeschnitten wird. Das sollte man zeichnen.

(c) $\vec{u}(\lambda,\mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $0 \leq \lambda,\mu \leq 1$: Es handelt sich um eine Parallelogrammfläche, wenn die Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ linear unabhängig sind, dagegen nur um eine Strecke, wenn $\vec{a},\vec{b}$ parallel sind und wenigstens einer der Vektoren nicht Null, schließlich nur um den Urspungspunkt, wenn $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$.

7. Nennen wir die Kantenvektoren (das Viereck umlaufend) $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, also $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = \vec{0}$. Der Differenzvektor der Ortsvektoren der ersten beiden Seitenmittelpunkte ist

$$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right),$$

für Seitenmittelpunkte 2 und 3 erhalten wir

$$\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right),$$

für Seitenmittelpunkte 3 und 4

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \left(\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

(also parallel zur ersten Verbindung!), für 4 und 1 ergibt sich:

$$-\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right),$$

also parallel zur zweiten Verbindung.