Lösungen zu den Aufgaben zum Wochenende (1)

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}} \\ &= 2\sqrt{1+x^2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!\,(k+1)+n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

3. Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$. Induktionsbeweis: $\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$. Daher gilt die Aussage für $n=0$ (Induktionsanfang). Sei nun vorausgesetzt für eine beliebige Zahl n, dass die Aussage für n gilt, d.h. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$ (Induktionsvoraussetzung). Dann müssen wir zeigen, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt. Das bedeutet: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2}-1$. Nun haben wir unter Benutzung der rekursiven Definition des großen Summenzeichens: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1}+\sum_{k=0}^{n} 2^k$. Mit der Induktionsvoraussetzung ist das gleich $2^{n+1}+2^{n+1}-1 = 2\cdot 2^{n+1}-1 = 2^{n+2}-1$. Damit gilt die Aussage allgemein für alle natürlichen Zahlen.

4. Wir haben $\tan(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, also mit Punkt-Richtungsform $y = -2+\sqrt{3}\,(x-1) = \sqrt{3}x - \left(2+\sqrt{3}\right)$.

5. $y = 4x^2-3x+1 = 4\left(\left(x-\frac{3}{8}\right)^2\right) - \frac{9}{16}+1 = 4\left(\left(x-\frac{3}{8}\right)^2\right)+\frac{7}{16}$. Der Scheitelpunkt hat daher die Koordinatendarstellung $\left(\frac{3}{8};\frac{7}{16}\right)$.

6. $\vec{x}_P^L = \vec{x}_P^K - \vec{a}^K = (-1,7)$.

7. Naheliegend wählt man den Richtungsvektor $(1,-3)$ und den Aufpunktvektor $(0,4)$, da ergibt die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(\lambda) = (0,4)+\lambda\,(1,-3)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Andererseits haben wir gelernt, dass man die Lösungsmenge der Gleichung wie folgt parametrisieren kann:

$$\vec{y}(\lambda) = (\lambda,-3\lambda+4)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Aber damit $\vec{y}(\lambda) = (0,4)+\lambda\,(1,-3)$, so dass wir genau dieselbe Paramterisierung stoßen, die auch geometrisch nahelag.

8. Seien $\vec{x}_P^K = (2,1,-3)$, $\vec{x}_Q^K = (-1,2,4)$, in einem beliebigem Koordinatensystem K für den E^3.

   (a)

$$\begin{aligned}\vec{x}_g(\lambda) &= \vec{x}_P+\lambda\,(\vec{x}_Q-\vec{x}_P)\,,\lambda\in\mathbb{R}\ \text{(geometrischeForm), Koordinatenform:} \\ \vec{x}_g^K(\lambda) &= (2,1,-3)+\lambda\,(-3,1,7)\,,\ \lambda\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

   (b) Die beiden gesuchten Punkte sind in Koordinatenform: $\vec{x}_{S_k}^K = \vec{x}_P^K+\frac{k}{3}(-3,1,7)\,,\ k=1,2$, also $\vec{x}_{S_1}^K = \frac{1}{3}(3,4,-2)$ und $\vec{x}_{S_2}^K = \frac{1}{3}(0,5,5)$.

   (c) $\vec{y}_h^K(\lambda) = (1,-1,1)+(2,1,-3)+\lambda\,(-3,1,7) = (3,0,-2)+\lambda\,(-3,1,7)\,,\lambda\in\mathbb{R}$.

9. Für $x,y\geq 0$ sind die Punkte mit $y\leq 1-x$ (so kann für den Fall die Bedingung einfacher geschrieben werden) einfach die von $x-$ Achse und der Geraden $y=1-x$ eingeschlossenen, also die Punkte auf der Dreiecksfläche des Dreiecks, das vom Ursprung und den Punkten $(1,0)$ und $(0,1)$ gebildet wird. Mit Symmetrien 'Spiegelung an $x-$ Achse' und 'Spiegelung an $y-$ Achse' erhält man das Quadrat mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$. Die erste Symmetrie bedeutet: Setzt man in die Bedingung (also die vorgegebene Ungleichung) für y ein: $-y$, so ändert sich die Bedingung nicht. (Entsprechend für die zweite Symmetrie: Setzt man für x ein: $-x$, so

ändert das nichts an der Bedingung.) Die Verschiebung mit dem Vektor $\vec{a}^K = (3,2)$ erhält man durch Addieren dieses Vektors auf alle Ortsvektoren des Quadrats, *für die Bedingung bedeutet dies aber gerade,* dass man die Ungleichung durch $|x-3| + |y-2| \leq 1$ ersetzen muss, um das verschobene Quadrat H zu beschreiben. Die neue Ungleichung sagt gerade: Verschiebt man zurück, so erhält man das alte Quadrat G, das die alte Ungleichung erfüllt! Im Falle eines nicht kartesischen Systems erhält man im Allgemeinen nur ein Parallelogramm mit der Ungleichungsbedingung. Es hat die Eckpunkte mit den Ortsvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, -\vec{a}_1, -\vec{a}_2$. Im erwähnten konkreten Beispiel sind das die Punkte mit den Koordinatendarstellungen (im alten kartesischen System!): $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$.

10. Die Punkte des Dreiecks PQR kann man gemäß den Einsichten aus der letzten Aufgabe wie folgt parametrisieren:

$$\vec{x}(\alpha,\beta) = \vec{x}_P + \alpha(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) + \beta(\vec{x}_R - \vec{x}_P), \ 0 \leq \alpha, \beta, \ \alpha + \beta \leq 1.$$

Dazu brauchen wir nur an das erste oben betrachtete Dreieck zu denken und an allgemeines Koordinatensystem zu denken, hier wären die beiden Differenzvektoren dafür zu nehmen. Eine symmetrische Form erhalten wir, indem wir den Ausdruck für $\vec{x}(\alpha,\beta)$ ein wenig ordnen:

$$\vec{x}(\alpha,\beta) = (1-\alpha-\beta)\vec{x}_P + \alpha\vec{x}_Q + \beta\vec{x}_R,$$

nennen wir nun $\gamma = 1 - \alpha - \beta$ und beachten die oben angegebenen Bedingungen für α, β, so erhalten wir die symmetrische Parametrisierungsform:

$$\vec{y}(\gamma,\alpha,\beta) = \gamma\vec{x}_P + \alpha\vec{x}_Q + \beta\vec{x}_R, \ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

So etwas wie $\vec{y}(\gamma,\alpha,\beta)$ nennt man ein gewichtetes Mittel der Ortsvektoren $\vec{x}_P, \vec{x}_Q, \vec{x}_R$.