Lösungen zu Übung (2)

1. (Bei Absicherung, dass dies gekonnt ist, hat man eine der wesentlichen Hürden beim Lösen linearer Gleichungssysteme genommen!)

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z &= 1 \\ 3x-4y+3z &= 1. \end{aligned}$$

Erste Zeile mal 3 minus zweite Zeile mal 2 (um $x$ hinauszuwerfen) ist zu bilden. Man schaut jeweils nur auf die beiden Koeffizienten (Vorfaktoren) zu jeder einzelnen Unbestimmten, und es ist bereits klar, dass als neuer Vorfaktor zu $x$ Null herauskommt, also sind nur noch die Faktoren vor $y$ und dann vor $z$ zu betrachten, anschließend die rechte Seite entsprechend. Wir rechnen im Kopf $3\cdot 3-2\cdot(-4)$ oder besser $3\cdot 3+2\cdot 4$, macht 17, und schreiben hin: $17y$. (*Nicht etwa schreiben wir so etwas wie* $3\cdot 3y-2(-4)\,y$, *sondern wenden das Distributivgesetz ebenfalls im Kopf an - es ist nur wichtig, daran zu denken, dass ein Ausdruck 'Faktor mal y' gesucht ist!*). Ebenso finden wir: $-18z$ und 1 für die rechte Seite. Das schreiben wir nacheinander hin zu

$$17y-18z=1.$$

Der zweite Teil zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} (a+1)\,x-by &= 1 \\ cx+(2a-1)\,y &= 1. \end{aligned}$$

Zunächst werfen wir $x$ hinaus. Dazu müssen wir sehen, dass die zweite Zeile mal $a+1$ minus erste Zeile mal $c$ zu bilden ist (so ist es etwas bequemer im Hinblick auf die entscheidenden Koeffizienten bei $y$). Also im Kopf *wenigstens*:

$$((2a-1)\,(a+1)+bc)\,y=1+a-c.$$

Wir sehen, dass dies unmittelbar nach $y$ aufgelöst werden kann. Normalerweise kann man den Vorfaktor etwas vereinfachen, bei dieser allgemeinen Form aber bringt das Ausmultiplizieren der ersten beiden Klammern nur dann etwas, wenn man einen Schritt weiterdenkt und die Bedeutung der Frage sieht, ob der Faktor bei $y$ Null wird. Dann hätte man in diesem Falle eine quadratische Gleichung im Parameter $a$ zu behandeln, deren Normalform über jenes Ausmultiplizieren nur zu gewinnen ist. Also schreiben wir doch noch die Endform:

$$\left(2a^2+a-1+bc\right)y=1+a-c.$$

Auch hier schaffen wir das im Kopf, wenn wir nur daran denken, dass wir jeweils nur fragen müssen: Wie sieht bei $(2a-1)\,(a+1)$ das Glied mit $a^2$ / das Glied mit $a$ / das konstante Glied aus? Analog ist die Sache durchzuführen, um $y$ hinauszuwerfen, und man findet

$$\left(2a^2+a-1+bc\right)x=-1+2a-b.$$

Der Vorfaktor ist derselbe, und das hat System (Determinante). Somit können wir auch die Lösung aufschreiben, wenn nur $2a^2+a-1+bc\neq 0$. Sie besteht nur aus dem Paar

$$\left(\frac{-1+2a+b}{2a^2+a-1+bc},\frac{1+a-c}{2a^2+a-1+bc}\right).$$

2. Lösungsformel ergibt folgende Lösungen zur Gleichung $x^2+(a+1)\,x+5=0$ :

$$x_{1,2}=-\frac{a+1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a-19}.$$

Aber das gibt nicht einfach die Lösungsmenge für beliebige $a\in\mathbb{R}$ an, sondern wir müssen untersuchen, ob $a^2+2a-19$ größer als Null, Null oder kleiner als Null ist. Dazu lösen wir $a^2+2a-19=0$ (jetzt ist $a$ Unbestimmte, nur für diesen Teil der Aufgabe!). Wir finden die Lösungen $a_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{5}$. Das bedeutet für die ursprüngliche Gleichung - wir bezeichnen die Lösungsmenge (in $x$ (!)) zum Parameterwert $a$ mit $L_a$ :

$$\begin{aligned}
L_a &= \varnothing \text{ für } -1-2\sqrt{5} < a < -1+2\sqrt{5}, \\
L_a &= \left\{-\frac{a+1}{2}\right\} \text{ für } a = a_1 \text{ sowie } a = a_2, \\
L_a &= \left\{-\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a-19}, -\frac{a+1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a-19}\right\} \\
& \quad \text{(bestehend aus zwei verschiedenen Elementen) für } a < -1-2\sqrt{5} \\
\text{sowie für } a &> -1+2\sqrt{5} \text{ (oder zusammengefasst: } |a+1| > 2\sqrt{5}\text{).}
\end{aligned}$$

Wenn man die Gleichung als Gleichung mit zwei Unbestimmten auffasst, so besteht die Lösungsmenge aus Paaren $(a, x)$. Diese Menge anzugeben, reicht das Gerechnete voll aus:

$$\begin{aligned}
L &= \left\{\left(a, -\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a-19}\right) \mid |a+1| > 2\sqrt{5}\right\} \\
&\cup \left\{\left(a, -\frac{a+1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2a-19}\right) \mid |a+1| > 2\sqrt{5}\right\} \\
&\cup \left\{\left(a, -\frac{a+1}{2}\right) \mid a \in \left\{-1-2\sqrt{5}, -1+2\sqrt{5}\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

Als Gleichung nur in $a$ handelt es sich um eine simple lineare Gleichung, die man sofort auflösen kann, sofern $x$ nicht Null ist.

3. Wir suchen die beiden Geraden der Form $y = m(x+5)$, welche mit dem Einheitskreis nur einen Schnittpunkt haben. Einsetzen in die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ergibt

$$x^2 + m^2(x+5)^2 = 1,$$

Lösen in der Unbestimmten $x$ ergibt $x_{1,2}(m) = \frac{1}{2(1+m^2)}\left(-10m^2 \pm 2\sqrt{1-24m^2}\right)$, also ergibt dies genau für $1 - 24m^2 = 0$ einen einzigen Schnittpunkt. Somit $m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{24}} = \pm\frac{1}{12}\sqrt{6}$. Damit lauten die beiden gesuchten Gleichungen $y = \frac{1}{12}\sqrt{6}x + \frac{5}{12}\sqrt{6}$ und $y = -\frac{1}{12}\sqrt{6}x - \frac{5}{12}\sqrt{6}$.

4. $(x-2y)^5 = x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$.

5. $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{k+i=s} a_k b_i\right) x^s$ ist die allgemeine Lösung, speziell für $s = 3$ haben wir, was man mit $\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...a_nx^n\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ...b_mx^m\right)$ gut übersieht:

$$\sum_{k+i=3} a_k b_i = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$$

als Vorfaktor zu $x^3$ im Produkt.

6. $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y) = \sum_{i=1}^{n} x_i + ny$, besser $ny + \sum_{i=1}^{n} x_i$. Dagegen $\sum_{i=1}^{n} x_i + y = y + \sum_{i=1}^{n} x_i$, so besser geschrieben.

7.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x} + \overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2.
\end{aligned}$$

Denken Sie bei der Deutung an die vorige Aufgabe! Also: Das arithmetische Mittel der quadrierten Differenzen der Einzelwerte zu deren Mittelwert ist gleich dem Mittelwert der Quadrate der Einzelwerte minus Quadrat des Mittelwertes (der Einzelwerte). Insbesondere ist der Mittelwert nicht mit dem Quadrat zu vertauschen, sonst käme immer Null heraus. Der Sinn des Ausdrucks ist es, die Streuung zu messen. (Es ist die sogenannte Varianz, allerdings nur in dem Falle, dass es sich nicht nur um eine Stichprobe handelt und dass zusätzlich alle Werte $x_i$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen. Ansonsten handelt es sich um einen vernünftigen Schätzwert für die Varianz, doch dann nimmt man eher den Faktor $\frac{1}{n-1}$ statt $\frac{1}{n}$. Das liegt daran, dass die Stichprobenwerte $x_i$ sich im Allgemeinen dichter um deren eigenes Mittel scharen als um dan Mittel aller möglichen Werte.)

8. Wir haben $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3} = \frac{1}{R_{ges}}$, also

$$R_{ges} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2},$$

allgemein für $n$ parallel geschaltete Widerstände:

$$R_{ges} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} R_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{j\neq k, 1\leq j\leq n} R_j}.$$

9. Es gibt $\binom{12}{3}$ Auswahlmöglichkeiten, darunter sind $\binom{10}{1}$ solche, bei denen zwei vorher bestimmte Leute vorkommen. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{10}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22}.$$