Lösungen zur Übung (1)

1. 'Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl $\neq 0$ multipliziert' reicht für beide Fälle, da Dividieren durch a dasselbe wie Multiplizieren mit $\frac{1}{a}$ bedeutet.

2. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ist die geforderte Summenzerlegung. (Sie fragen sich, warum etwas so Einfaches gefragt wird? Nun, wenn Anfänger ein Integral auszurechnen haben, bei dem gerade soch eine Summenzerlegung wichtig wird, so wird genau sie eben in den meisten Fällen nicht gesehen (!).) Ebenso wird die Produktzerlegung $\frac{ab}{c} = a\frac{b}{c} = b\frac{a}{c} = \frac{1}{c}ab$ in entscheidenden Momenten nicht gesehen oder macht gar Schwierigkeiten.

3. $\frac{a}{x^2-y^2} + \frac{a}{(x+y)^2} = \frac{a}{x+y}\left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{a}{x+y} \cdot \frac{2x}{x^2-y^2} = \frac{2ax}{(x+y)^2(x-y)}$. Es besteht in aller Regel keinerlei Anlass, den Nenner auszumultiplizieren - Anfänger tun das immer wieder sinnlos! Im Gegenteil: Für übliche Zwecke ist gerade diese faktorisierte Form segensreich.

4. Für eine Lösung x ist ohnehin gefordert: $x \neq 0$, $x \neq \pm a$. Multiplikation der Gleichung mit $(a-x)(a+x)$ führt auf die dann gleichwertige Gleichung $2ax = a^2 - x^2$, in Normalform also $x^2 + 2ax - a^2 = 0$, Lösungsformel ergibt $x_{1,2}(a) = -a \pm \sqrt{2a^2}$, also $x_{1,2}(a) = \left(-1 \pm \sqrt{2}\right)a$. Für $a = 0$ ist daher die Lösungsmenge leer, und für alle $a \neq 0$ haben wir die aus genau zwei Elementen bestehende Lösungsmenge $L_a = \left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)a, \left(-1-\sqrt{2}\right)a\right\}$.

5. Zunächst ergibt sich $\frac{-a}{b} = \frac{(-1)(-a)}{(-1)b} = \frac{a}{-b}$, dabei verwenden wir nur Erweitern und Vorzeichenregeln für die Produkte. Weiter ist $-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$. Dabei benötigen wir nur Vorzeichenregel für Produkte und das Multiplizieren eines Bruches mit einer Zahl: $x\frac{a}{b} = \frac{xa}{b}$. Damit ist das Verlangte bereits erledigt. Wenn man so ehrgeizig ist, wie angedeutet mit viel weniger (den Axiomen) auszukommen, so hat man wie erwähnt viel mehr zu tun: Die entscheidende Vorzeichenregel für Produkte war: $-x = (-1)x$, daraus erhalten wir auch $(-1)(-a) = -(-a) = a$. Nun verbleiben $-x = (-1)x$ und $-(-x) = x$. Diese ergeben sich z.B. so: Zunächst braucht man

$$\begin{aligned} 0x &= (0+0)x = 0x + 0x \text{ (Distributivgesetz und } 0 + x = x\text{), also} \\ &\quad \text{nach Addition von } -(0x) \ :\ 0 = 0x \text{ (Assoziativgesetz ebenfalls verwandt).} \end{aligned}$$

Nunmehr weiter:

$$\begin{aligned} (-1)x + x &= (-1)x + (1x) = (-1+1)x = 0x = 0, \text{ also} \\ &\quad \text{(addiere auf beiden Seiten } -x \text{ und nutze } -x + x = 0) \\ (-1)x &= -x. \end{aligned}$$

Verbleibt noch $-(-x) = x$, dazu: Einsetzen von $-x$ für x in die allgemeine Formel $-x + x = 0$ ergibt $-(-x) + (-x) = 0$, Addition von x auf beiden Seiten (rechts) ergibt mit Assoziativgesetz sowie der Gleichung $-x + x = 0$ sofort $-(-x) = x$.

6. (Eine Übung im genauen Umgang mit Formulierungen - passiv und aktiv - und auch im Veranschaulichen von Zahlenpaarmengen.) Wir betrachten die Ungleichung $y < 1 + x^2$.

   (a) Die Lösungsmenge von $y < 1 + x^2$ ist die Menge aller Zahlenpaare (x, y), welche diese Ungleichung erfüllen. Diese Bedingung kann man nicht weiter rechnerisch vereinfachen, wohl aber die Lösungsmenge veranschaulichen: Sie besteht geometrisch gedeutet aus allen Punkten unterhalb der Parabel $y = 1 + x^2$, die man zeichnen sollte.

   (b) Die Menge der Zahlen y, für die gilt: $y < 1 + x^2$ *für alle Zahlen* x, ist einfach die Menge der Zahlen $y < 1$. Nennen wir diese Menge A, so ist $\{(x, y) \,|\, y \in A, x \in \mathbb{R}\}$ - das ist anschaulich eine Halbebene - eine Teilmenge der Lösungsmenge aus (a).

   (c) Diejenigen Zahlen y, welche die Ungleichung $y < 1 + x^2$ *für wenigstens eine reelle Zahl* x erfüllen, bilden einfach die Menge *aller* reellen Zahlen. Wenn $y_0 < 1$, so kommt man auf (b) zurück, wenn nicht, so ist für x_0 mit hinreichend großem Betrag die Halbgerade $\{(x_0, y) \,|\, y \leq y_0\}$ Teilmenge der Lösungsmenge aus (a).

7. $y = \frac{-4-2}{3-(-2)}(x-(-2))+2 = -\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}$ ist die erste Form, unter Nutzung der Zwei-Punkte-Form. $-\frac{6}{5}x-y = \frac{2}{5}$ ergibt nach Multiplikation mit $\frac{5}{2}$: $-3x-\frac{5}{2}y = 1$, und daraus liest man ab (so etwas sollte man üben!): $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{2}{5}$. Man überzeuge sich: Das sind wirklich die Achsenabschnitte, also mit $f(x) = -\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}$: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ und $f(0) = -\frac{2}{5}$.

8. Wir lösen $2x^2-2x-5 = 0$, Normalform $x^2-x-\frac{5}{2} = 0$, und finden $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{11}$, das ergibt $y = -2\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)\right)$, und wir lesen ab: $A = -2$, $\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}$, $\beta = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)$.
Für die Scheitelpunktsform:
$y = -2\left(x^2-1\right)-5 = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+5 = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$. ($B = -2, c = \frac{1}{2}, d = \frac{11}{2}$.) Der Scheitelpunkt hat daher die Koordinatendarstellung $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

9. g und h sind mit ihren Bestimmungsgleichungen $y = mx+b_1$, $y = mx+b_2$ sofort als parallel zu erkennen. Ferner liegt (bei üblicher Orientierung) mit $b_1 < b_2$ die Gerade h über der Geraden g. Die Menge alle Punkte zwischen den Geraden wird durch die Ungleichungsbedingungen $b_1 \leq y-mx \leq b_2$ ausgedrückt, da $b_1 < b_2$. (Wegen der angegebenen Präzisierung von 'zwischen' stehen 'kleiner-oder-gleich' -Zeichen.)

10. Wir haben (Skizze anfertigen!) als Summe der Flächeninhalte beider Dreiecke, in welche das große durch die Höhe geteilt wird: $F = \frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}xy$. Dabei nennen wir die Länge der Höhe h und die Längen der von der Höhe gebildeten Hypotenusenabschnitte a und b. Das ergibt $h = \frac{xy}{a+b} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (Pythagoras für letztere Gleichung). Zum zweiten Teil der Aufgabe: Wir spannen ein Steigungsdreieck für die obere Gerade genau zwischen beide Geraden ein, so dass der dritte Punkt also auf der unteren Geraden liegt. Die Seite dieses Dreiecks parallel zur $y-$ Achse hat dann die Länge $|b_2-b_1|$, die Seite parallel zur $x-$ Achse hat mit der gegebenen Steigung m dann die Länge $\frac{|b_2-b_1|}{|m|}$. Wir wenden das oben gewonnene Resultat an - offenbar ist der gesuchte Abstand gerade die Höhenlänge h des Steigungsdreiecks der Höhe im rechten Winkel:
$$h = \frac{|b_2-b_1|^2}{|m|\sqrt{\frac{|b_2-b_1|^2}{|m|^2}+|b_2-b_1|^2}}, \text{ also } h = \frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+m^2}}.$$
Das ist die gewünschte Abstandsformel, die in einfachster Weise den Abstand in den gegebenen Größen b_1, b_2, m ausdrückt. (Diese Aufgabe hat nicht nur den Sinn, einige Dinge einmal konsequent hintereinander zu denken und zu rechnen, insbesondere Resultate für weitere auszunutzen, sondern auch den, dass Sie später den Segen der Vektorrechnung besser zu schätzen wissen. Damit lässt sich nämlich eine solche Abstandsformel wesentlich einfacher gewinnen.)