Übungen (16)

1. (a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int e^{2x+1}dx, \qquad \int \ln\left(\sqrt{x}\right)dx, \qquad \int \frac{2}{\left(\frac{x}{3}+1\right)^2+1}dx$$

   (b)

$$\int \frac{x}{(x-1)^4}dx, \qquad \int \frac{x}{x+1}dx, \qquad \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}dx, \qquad \int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx.$$

   (c) Berechnen Sie mittels partieller Integration: $\int (2x-1)\, e^x dx$.

2. Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = \sin(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)$ auf einer Periodendauer - Hinweis: Sie können wiederum besser die Funktion mittels Additionstheorems umformen, als partielle Integration anwenden.
3. Berechnen Sie den Mittelwert der Ortsvektoren $\vec{x}(\alpha) = \alpha \vec{x}_P + (1-\alpha)\, \vec{x}_Q$, $0 \leq \alpha \leq 1$. (Entspricht das Resultat den Erwartungen?) Ebenso: Mittelwert der Ortsvektoren $\vec{x}(t) = \cos(t)\vec{e}_1 + \sin(t)\vec{e}_2$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
4. Welche mittlere vektorielle Geschwindigkeit hat ein Teilchen, dessen Orts-Zeit-Funktion beschrieben wird durch $\vec{x}(t) = (2,1,3) + t\,(1,2,2) + \frac{1}{2}t^2\,(2,3,-5)$, im Zeitintervall $[0,3]$? Welches Integral beschreibt die mittlere skalare Geschwindigkeit auf demselben Zeitintervall? Können Sie das auch rechnen? (Nutzen Sie ein Grundintegral einer Formelsammlung.) Wie bekommen Sie also die Länge des im Zeitintervall zurückgelegten Weges?
5. Gegeben seien $\vec{x}_P$ und eine Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_R + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für eine Gerade g. Rechnen Sie den Punkt Q auf der Geraden g aus, der minimalen Abstand zum Punkt P hat, als Extremwertaufgabe. (Arbeiten Sie mit dem Abstandsquadrat - warum kann man das einfach tun?) Zeigen Sie, dass beim Resutat $\vec{x}_Q - \vec{x}_P$ senkrecht auf der Geraden steht.

Übung (17)

1. Sie wissen von der Funktion f: $f(2) = 3$ und $f'(x) = e^{-2x}$ für $x \geq 2$. Berechnen Sie $f(5)$.
2. Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kreiskegels vom Radius r und der Höhe h als Volumen eines Rotationskörpers.
3. Es sei $f(x) = e^{-2x}$. Berechnen Sie die mittlere Steigung dieser Funktion im Intervall $[1, 3]$. Berechnen Sie für diesen Fall eine Zahl $\xi \in [1, 3]$, so dass die lokale Steigung von f an der Stelle ξ gleich jener mittleren Steigung ist. Wie viele solche Zahlen ξ gibt es?
4. An welchen Stellen hat $g(x) = e^{-x}\sin(x)$ was für Extrema?
5. In welchen Punkten und in welchen Winkeln schneidet die Parabel $\vec{x}(t) = t(1, 2, 2) + t^2(1, 2, -3)$, $t \in \mathbb{R}$, die $xy-$ Ebene? In welchem Winkel steht die $xy-$ Ebene zur Parabelebene?
6. Sie nehmen folgende Operation in der Ebene vor: Streckung mit Zentrum Ursprung und Streckungsfaktor 2. Was entsteht dabei aus dem Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$?
7. Spiegeln Sie den Punkt P, $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, an der Ebene E mit der Gleichung $2x - 3y + 2z = 0$. (Kartesische Koordinaten!)
8. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ 2y - 2z + u &= 2 \\ 3x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

   Geben Sie nun auch unmittelbar die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems an.

Übung (18)

1. Bilden Sie $\frac{d}{dt}e^{-xt}$, $\frac{d}{da}\sqrt[3]{(x-a)^4}$.
2. Berechnen Sie $\int_0^x e^{-t}dt$. Was ist also $\int_0^\infty e^{-t}dt := \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}dt$?
3. Was ist $\sqrt{1-0.1^2}$ in Näherung 1. Ordnung?
4. Was ist $\frac{\arctan(x)}{\sin(x)+2\sqrt{1-x^2}}$ in Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$?
5. Schreiben Sie die Flugparabel hin zu folgenden Bedingungen: Beschleunigungsvektor konstant $(1,2,2)$, Ort zur Zeit $t=3:(1,1,1)$, Geschwindigkeit zur Zeit $t=3:(3,1,4)$.
6. Parametrisieren Sie die Menge aller Punkte, die von P, $\vec{x}_P=(0,0,1)$, und der $xy-$ Ebene denselben Abstand haben. Wie sieht die Punktmenge aus?
7. Berechnen Sie $\frac{2-\sqrt{3}j}{1+\sqrt{3}j}$. Welchen Betrag hat die Zahl $(2-3j)^7$? Berechnen Sie in kartesischer Endform: $(2-3j)^{10}$. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $\overline{z}\,(z-1)=6+2j$. (Überlegen Sie, wie Sie z ansetzen sollten!)
8. Schneiden Sie die Gerade $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ mit der Ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$.
9. Berechnen Sie möglichst schnell einen Richtungsvektor für die Schnittgerade der Ebenen, welche durch die Gleichungen $2x-3y+z=1$, $-3x+2y+3z=0$ gegeben sind.