Übung (13)

1. Skizzieren Sie grob die Graphen zu den Funktionen mit den Rechenausdrücken $x\sin(x)$, $\sin\left(x^2\right)$, $\sin^2(x)$, $\sin(x)/x$ (Das Verhalten dieser Funktion bei $x=0$ kennen Sie bereits!), $e^{\sin(x)}$.
2. Skizzieren Sie grob die Graphen zu den Funktionen mit den Rechenausdrücken $-\ln(-x)$, x^2e^x. (Geben Sie jeweils den maximalen reellen Defininitionsbereich an.)
3. Der Graph einer Funktion soll aussehen wie der von arctan, nur soll der Wendepunkt in $(2,3)$ liegen, außerdem soll der Graph von arctan in Richtung der $x-$ Achse um den Faktor 4 gestreckt erscheinen. Geben Sie für die Funktion einen passenden Rechenausdruck.
4. Lösen Sie folgende Gleichungen: $2^x=5$, $\log_5(x)=10$, $2^{3x}=3^{x-1}$. Warum führt der Versuch, eine Gleichung wie $\log_{10}(x)=\log_5(x-1)$ rechnerisch aufzulösen, nicht zum Erfolg? Was können Sie aber graphisch zur Existenz von Lösungen sagen?
5. Wenn ein Kondensator sich so auflädt, dass er zur Zeit 0 die Ladung $q_0\geq 0$ besitzt und sich mit Fortschreiten um eine Zeiteinheit der Abstand zum unerreichbaren Schwellenwert $q_m>q_0$ halbiert: Nach welcher Zeit wird 99% der maximalen Ladung erreicht sein? Geben Sie auch den Ausdruck für die Funktion $q(t)=$ Ladung zur Zeit t für den Fall, dass die Ladung $q_0$für einen beliebigen Zeitpunkt t_0 vorgegeben ist, bei gleichem Wachstumsgesetz.
6. Stellen Sie sich vor, ein Objekt sei aus 10^{24} Objekten, und Sie können nacheinander Fragen beantwortet bekommen, deren Antworten jeweils die Menge der verbleibenden Kandidaten halbieren. Nach wie vielen Fragen haben Sie das Objekt identifiziert?
7. Seien $f(x)=x\ln(x)+1/x$, $g(x)=\sin^2(f(3x+1))$. Geben Sie korrekt den Ausdruck für $g(x)$ in konkreter Form an, als aus den Grundfunktionen aufgebaut, und malen Sie dafür das Baumdiagramm des rekursiven Abbaus auf.
8. Berechnen Sie $e^{-0.1}$ in Näherung 1. Ordnung. Geben Sie absoluten, relativen und lokalen Fehler dazu an (mit Taschenrechner, nur auf wenige Stellen genau - es kommt auf die Größenordnungen an!).
9. Geben Sie einen (möglichst einfachen) Ausdruck für eine gebrochen rationale Funktion an, welche (ausschließlich) an den Stellen $x_0=1, x_1=2$ Nullstellen und an den Stellen $x_2=-1$ und $x_3=-2$ Pole hat und die außerdem nach Null geht für $x\to\pm\infty$. Machen Sie sich auch klar, dass es viele Funktionen gibt, welche die genannten Bedingungen erfüllen.

Übung (14)

1. Führen Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = x^5$ an der (beliebig vorgegebenen) Stelle x_0 durch. (Nutzen Sie die allgemeine binomische Formel!) Verifizieren Sie die Resttermeigenschaft, und schließen Sie auf Existenz und Gestalt von $f'(x_0)$.
2. Berechnen Sie folgende Ableitungen:
   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x + 5\sqrt[4]{x^3} + x^e + \ln(x) - 3\sin(x)\right)$
   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}\left(-2x+1\right)^5$
   (c) $\frac{d}{dx}(x^a\tan(x))$, $a \in \mathbb{R}$. (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan$ schon kennen.)
   (d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?
   (e) $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{\sin(1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.
   (f) $\frac{d}{dx}\left(1 - 2x^2\right)^2$ (Kettenregel!)
   (g) $\frac{d}{dx}\arctan^3(x)$ (was ist beim Graphen qualitativ anders als bei arctan, und wie äußert sich das in der Ableitung?)
   (h) $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x^2 + 1}$, α reellwertige Konstante (Wohin geht die Steigung der Funktion $x \mapsto \sqrt{\alpha x^2 + 1}$ für x gegen den rechten Rand des Definitionsbereiches und für $x \to 0$?)
   (i) $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$
   (j) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x}{(x+\alpha)^2(x-2)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)
   (k) $\frac{d}{dx}\log_3(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ $(a > 0)$.
3. Skizzieren Sie grob den Graphen zu $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$. Behandeln Sie dazu die Frage nach lokalen Extremwerten quantitativ.

Übung (15)

1. Bilden Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+\ln x}, \qquad \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}, \quad \frac{d}{dx}\arctan(x^3-1).$$

2. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für den Ausdruck $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ für $v^2 << c^2$. (Welche Funktion ist zu betrachten?) Welche Stelle hinter dem Komma wird bei der Näherung erst falsch, wenn $v = c/100$?
3. (a) Geben Sie die Gleichungen (die einfachen Bestimmungsgleichungen der Form $y = mx + b$ sind gemeint) für die Tangente und die Normale zum Graphen von sin an der Stelle $x_0 = \pi/4$.
   (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahn der Kurve $\vec{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, im Punkte $\vec{x}(1)$. Geben sie auch eine Parameterdarstellung und eine Normalenform für die Ebene, welche diesen Punkt enthält und zu den Vektoren $\vec{x}'(1), \vec{x}''(1)$ parallel liegt. Ist diese Ebene parallel zu derjenigen, welche von $\vec{x}'(-1), \vec{x}''(-1)$ aufgespannt wird? Welche Verhältnisse erwarten Sie dagegen bei ebenen Kurven?
4. Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabel, indem Sie die Bedingung $\vec{x}'(t)\vec{x}''(t) = 0$ nutzen: $\vec{x}(t) = (2,1,1) + t\,(1,2,2) + \frac{1}{2}t^2\,(2,1,-3)\,,\ t \in \mathbb{R}$.
5. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ überall definierte und überall ableitbare gerade Funktion. Rechnen Sie aus, dass f' dann eine ungerade Funktion ist.
6. Machen Sie ein paar ganz simple Überlegungen (Vorzeichen, stückweise, und Verhalten für große $|x|$ genügen im Wesentlichen schon!), um ganz schnell grob qualitativ die Graphen zu den Funktionen $f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$ und $g(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$ hinzubekommen. (Verfallen Sie nicht etwa auf den Gedanken, die Produkte auszumultiplizieren!)
7. Nutzen Sie den Satz vom endlichen Zuwachs, um folgende Ungleichung für alle $x \in\ ]0,1[$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, zu beweisen: $\sqrt[n]{x} \geq 1 + \frac{1}{n}(x-1)$. Was folgt daraus für den Fall, dass man aus einer beliebig kleinen Zahl $x \in]0,1[$ die $n-$ te Wurzel für immer größere n zieht?

Aufgaben zum Wochenende (4)

1. Geben Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2(x^2-4)}$ an. Begründen Sie *verbal* alle wesentlichen Eigenschaften des Graphen, und skizzieren Sie ihn. Berechnen Sie auch die erste Ableitung, und verifizieren Sie, dass sie keine Nullstellen hat. Geben Sie den Winkel an, in dem die $x-$ Achse geschnitten wird.
2. Begründen Sie allein mit Betrachtung der ersten Ableitung (geben Sie alle Nullstellen davon an), dass $g(x) = x + \sin(x)$ keine lokalen Extrema hat. Skizzieren Sie daraufhin grob den Graphen.
3. Behandeln Sie *quantitativ* die Extremwertfrage zur Funktion $h(x) = x^2 \ln(x)$. Wie sieht der Graph im maximalen reellen Definitionsbereich aus?
4. An welchen Stellen und in welchem Winkel durchschneidet die Kurve $z(t) = e^t e^{jt}, t \in \mathbb{R}$, die reelle Achse? (Verifizieren Sie, dass es immer derselbe Winkel ist.) Wie sieht die Kurve aus? (Hinweis: Sie können die Kurve auch als Abbildung in den $\mathbb{R}^2$ beschreiben. Aber Sie können auch naiv in naheliegender Weise die komplexe Exponentialfunktion (als Funktion einer *reellen* unabhängigen Veränderlichen!) ableiten und sehen, dass dasselbe herauskommt.)
5. Fassen Sie (in der Ebene) die durch die Gleichung $y^2 - x^2 - 1 = 0$ gegebene Hyperbel als Niveaukurve eines Skalarfeldes auf, und geben Sie dann die Gleichung für die Gerade, welche die Hyperbel im Punkt $\left(2, \sqrt{5}\right)$ senkrecht durchschneidet.
6. Schätzen Sie linear den Höchstfehler ab, den Sie bei der Bestimmung eines Kugelvolumens machen, wenn Sie den Radius mit 10 Metern gemessen haben und diese Länge um höchstens 1 mm vermessen wurde. (Schlagen Sie eine Berechnungsformel für das Kugelvolumen nach, wenn sie Ihnen fehlt!) - Wundert Sie das Ergebnis?
7. Was ist $\int_0^{\Delta x} e^{-x^2} dx$ *ungefähr* für kleine $|\Delta x|$? Stellen Sie fest, dass Ihre naheliegende Näherung gerade die Näherung 1. Ordnung des Integrals als Funktion von Δx darstellt!
8. Berechnen Sie folgende Integrale - oder aber *sehen Sie in Einzelfällen ohne Rechnung*, was herauskommen muss - schreiben Sie bei bestimmten Integralen stets das exakte Resultat hin, bevor Sie etwa eine Näherung als Dezimalwert angeben.
   (a) $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$, $\int_0^3 \sqrt[4]{x} dx$ $\int_{-1}^1 x^2 \sin^3(x) dx$, $\int_0^\pi \cos(4x) dx$.
   (b) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{-3x+1}} dx$, $\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \varphi) dt$, $\int \frac{1}{2x^2+1} dx$, schreiben Sie nun auch den Integranden von $\int \sin(x)\cos(x) dx$ so um, dass Sie $1/\alpha-$ Regel verwenden können. Rechnen Sie damit das unbestimmte Integral aus.
   (c) $\int x e^{-x} dx$, $\int \sqrt{x} \ln(x) dx$
   (d) (Umkehrung der Kettenregel:) $\int x \sin(x^2) dx$, $\int \sin(x)\cos(x) dx$ (vergleichen Sie das Resultat mit dem oben gewonnenen - Kommentar?).