Übung (9)

1. Rechnen Sie zu $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,-1,4)$, $\vec{c} = (1,2,-2)$ aus: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $3\vec{c}\left(2\vec{b} \times 4\vec{a}\right)$ - tun Sie das möglichst praktisch, deuten Sie die Resultate geometrisch, und prüfen Sie, dass Sie das ohne jedes Nachschlagen können!
2. Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} + 3\vec{y}) \times (4\vec{y} - 5\vec{x})$.
3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(\left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \left(5\vec{c} - 3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right)$.
4. Seien $\vec{x}_P = (2,3,-1)$, $\vec{x}_Q = (3,-2,2)$. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene, welche die Strecke $\overline{PQ}$ senkrecht halbiert.
5. Welchen Abstand haben die Ebenen E und F voneinander, die durch die Gleichungen $2x-3y+4z = 1$ und $4x - 6y + 8z = -10$ gegeben sind?
6. Welchen Abstand hat die Ebene E, gegeben durch $\vec{x}_E(\lambda,\mu) = (1,1,2) + \lambda(2,-1,3) + \mu(-2,2,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vom Ursprung? (Bringen Sie E zuvor auf Normalenform.)
7. Berechnen Sie den Abstand der folgenden beiden windschiefen Geraden ('windschief': nicht parallel und ohne Schnittpunkt, prüfen Sie diese Eigenschaft zuvor nach): $\vec{x}_g(\lambda) = (2,1,1) + \lambda(2,1,-3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{y}_h(\alpha) = (-2,1,0) + \alpha(2,2,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Nutzen Sie dabei folgende Idee: Der Abstand wird richtig gemessen durch die Länge eines Vektors, der senkrecht zu beiden Geraden steht und genau eingespannt werden kann zwischen einen Punkt auf der einen Geraden und einen Punkt auf der andern Geraden. (Nutzen Sie das Vektorprodukt für diesen Ansatz.)
8. Seien $\vec{x}_P = (1,2,2)$, $\vec{x}_Q = (3,4,4)$, $\vec{x}_R = (2,-2,-1)$. Parametrisieren Sie die Menge aller Punkte, die von P, Q, R gleichen Abstand haben.
9. Führen Sie auf der Ebene E zur Gleichung $x - 2y + z = 1$ ein kartesisches Koordinatensystem ein, mit Ursprung in P, $\vec{x}_P = (2,2,3)$. (Geben Sie einen Basisvektor beliebig parallel zur Ebene vor, nutzen Sie für den andern das Vektorprodukt.) Geben Sie nun eine Parameterdarstellung für den Kreis in E (Randkurve!) um den Punkt P mit Radius 5.

Übung (10)

1. Seien $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-2, -3, 1)$. Welches Volumen hat der von folgenden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannte Spat?
2. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des von $\vec{a} = (1, -3, 2)$ und $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ aufgespannten Parallelogramms. Nun berechnen Sie denselben Flächeninhalt noch einmal mit der Formel $F = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}$. Sie können die Gleichheit (am besten der Quadrate) der Resultate leicht beweisen, indem Sie speziell für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ parallel zur $xy-$ Ebene einfach ausrechnen, dass $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = \vec{x}^2\vec{y}^2 - (\vec{x}\vec{y})^2$. (Warum genügt dieser Spezialfall, um die Gleichheit für *alle* Vektorpaare zu begründen?)
3. Ein Kreis vom Radius R rollt über die $x-$ Achse, ohne zu rutschen, mit konstanter Geschwindigkeit - eine Umdrehung pro Zeiteinheit. Zur Zeit $t = 0$ sei der Mittelpunkt des Kreises in $(0, R)$.
   (a) Beschreiben Sie die Bewegung des Mittelpunktes.
   (b) Beschreiben Sie die Bewegung des Punktes auf der Kreisscheibe, der zur Zeit $t = 0$ die Koordinaten $(0, 0)$ hat.
4. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf: $2 - 3j$, $-3 + 2j$, $2e^{j\pi}$, $\frac{1}{2}e^{\cdot -j\pi/4}$.
5. Bringen Sie folgende komplexen Zahlen in exakte kartesische Form: $e^{3j\pi/2}$, $e^{3j\pi/4}$, $e^{-7j\pi/6}$, $e^{10j\pi/3}$. Wie sollte man letztere Zahl einfacher auch schon in der Polarform schreiben?
6. Bringen Sie auf kartesische Endform: $\frac{3}{j}$, $(2+3j)(4-j)$, $\frac{2+5j}{1-6j}$, $z\overline{z}+j$ $(z \in \mathbb{C})$, $\frac{1-2j}{2+4aj}$ $(a \in \mathbb{R})$. Warum ist $3z + 4j$ *keine* kartesische Form, wenn z komplex ist? Wie kann man dann eine kartesische Form aufschreiben?
7. Geben Sie den Wert von $\left|\frac{2-5j}{3+2j}\right|$ direkt an, ohne den Quotienten zu berechnen.
8. Geben Sie die Zahl $z = -3 + 3\sqrt{3}j$ in *exakter* Polarform.

Übung (11)

1. Zeichnen Sie die Zahlen $z_1 = 2e^{-j\pi/3}$, $z_2 = e^{j\pi/4}$, und bestimmen Sie (grob) *graphisch* $z_1 \cdot z_2$ sowie z_1/z_2. Schreiben Sie auch die Polardarstellungen der Resultate auf.
2. Rechnen Sie aus (mit etwas Konzentration sind beide im Kopfe auszurechnen!):
$$1 + j + \frac{1}{3j}, \quad \frac{1}{j + \frac{1}{j+1}}.$$
3. Sei $z \in \mathbb{C}$. Was ergeben die Ausdrücke $(z + \overline{z})/2$, $(z - \overline{z})/(2j)$? Wie sollte man für diese Aufgabe z ansetzen?
4. Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 10 = 0$, $\frac{1}{z-j} = 3 - j$, $\frac{zj+1}{z+2j} = j + 1$.
5. Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert durch $z(t) = 2 + jt$, $t \in \mathbb{R}$?
6. Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert durch $z(t) = 2 + 3j + 3e^{jt}$, $0 \leq t < \pi/4$?
7. Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung $z \mapsto ze^{j\pi/3}$?
8. Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert mit $z(t) = \cos^2(t) + j\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t < 2\pi$, und in welcher Weise wird die Bahn der Kurve durchlaufen, wenn Sie die Werte von t durch den angegebenen Bereich laufen lassen?

Übung (12)

1. Wie lautet die Konjugierte zu e^{jt}, $t \in \mathbb{R}$? Rechnen Sie nunmehr in kartesischen Koordinaten aus: $\frac{1}{e^{j\alpha}-1}$.
2. Bringen Sie in kartesische Endform: $\frac{1-2j}{2+3zj}$ ($z \in \mathbb{C}$) - für welche Zahlen z ist letzterer Ausdruck überhaupt definiert, und wie müssen Sie z darstellen, um das kartesische Resultat ausrechnen zu können?
3. Bringen Sie in kartesische Endform - Hinweis: Überlegen Sie gut, was Sie zuerst tun:
$$\frac{1+j}{\frac{1-j}{1+2j}-\frac{2-3j}{1-2j}}$$
4. Schreiben Sie $f(x) = 2\sin(4x+\varphi)$ als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion ohne Phasenverschiebung. Bringen Sie umgekehrt den Ausdruck $-2\sin(2x)+4\cos(2x)$ auf die Form $A\sin(2x+\varphi)$.
5. Lösen Sie in $\mathbb{C}^2$:
$$\begin{aligned}(1-j)z_1 - 3jz_2 &= 1\\ -jz_1 + (2+j)z_2 &= 0\end{aligned}$$
6. Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z^2 + 2jz + 1 + j = 0$.
7. Geben Sie mittels der Additionstheoreme einen Ausdruck für $\sin^2(x)$, in dem kein Quadrat oder Produkt trigonometrischer Funktion mehr zu bilden ist.
8. Geben Sie zu $g(x) = 4 - 2\cos(3x+1)$ die Abszissenwerte zu allen Maxima und Minima. Skizzieren Sie grob den Graphen mit Koordinatensystem und quantitativen Hinweisen (auf alle gewöhnlich interessierenden Größen) möglichst ökonomisch.