Übung (5)

1. Ein Fluss der Breite b ströme überall mit gleicher Geschwindigkeit v parallel zum Ufer, die Ufer seien gerade und parallel. Ein Schwimmer schwimme mit konstantem Geschwindigkeitsvektor $\vec{w}$ relativ zum Wasser (für seine Bewegung relativ zum Ufer ist die Strömungsgeschwindigkeit zu addieren!). Welche Bedingungen muss $\vec{w}$ erfüllen, damit er das andere Ufer am genau gegenüber liegenden Punkt erreicht? Nach welcher Zeit wird das andere Ufer dann dort erreicht? Was ergibt sich bei Voraussetzung einer bestimmten skalaren Geschwindigkeit w (Wurzel aus der Summe der Quadrate der Komponenten von $\vec{w}$), die der Schwimmer relativ zum Wasser schafft? Welche Bedingung muss w erfüllen, damit der Schwimmer seine Aufgabe lösen kann? (Erfassen und lösen Sie das Problem mittels vektorieller Beschreibung in zweidimensionaler Koordinatenform bei geeignetem Ansetzen eines kartesischen Koordinatensystems.)
2. Ein (besoffener) Mann der Höhe h geht auf ebenem Boden - idealisieren Sie den Mann zu einem Stab, der stets senkecht zur Bodenebene stehe. Der Fußpunkt beschreibe die Sinuskurve $y = \sin(x)$ auf der $xy-$ Ebene. Eine (punktförmige) Lichtquelle sitzt im Punkt $(2, 0, h_1)$, $h_1 > h$ und wirft den Schatten des Kopfpunktes des Mannes auf den Boden. Welche Bahn beschreibt der Schattenpunkt?
3. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, 2)$, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, -2) + \lambda(-2, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E, welche die Gerade g und den Punkt P enthält. Liegt der Punkt $(0, 0, 0)$ auf E? Verschieben Sie nun E parallel zu einer Ebene F, welche durch den Koordinatenursprung geht.
4. Seien $\vec{x}_P = (4, 3, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 1, 1)$, $\vec{x}_R = (2, 1, 3)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E, auf der P, Q, R liegen. Gegeben sei weiter der Punkt R, $\vec{x}_R = (6, 4, 3)$. Stellen Sie sich E als undurchsichtig vor: Kann man dann R vom Ursprung aus sehen? Formulieren Sie auch allgemein ein rechnerisches Kriterium für diese Bedingung.
5. Schneiden Sie die Ebenen E und F, welche im dreidimensionalen Raum durch folgende Gleichungen gegeben sind: $E : -3x - 3y + z = 1$, $F : -2x + 2y - 3z = 1$.
6. Schneiden Sie die Ebene E der vorigen Aufgabe mit der Ebene H, welche gegeben ist durch $\vec{x}_H(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1, 1) + \mu(-2, 2, -1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
7. (a) Stellen Sie von den folgenden beiden Ebenen E und F fest, dass sie parallel liegen: $\vec{x}_E\,(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(1, 2, 3) + \mu\,(2, 2, 1)\,, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{x}_F\,(\lambda, \mu) = (2, 1, 1) + \lambda\,(5, 6, 5) + \mu\,(-3, -2, 1)\,, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   (b) Geben Sie eine Parametrisierung der Menge aller Punkte, die zwischen den beiden Ebenen liegen (die Ebenen selbst eingeschlossen).

Übung (6)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:
$$\begin{gathered} x-2y+2u-3v=1 \\ 2x-2u+v=0 \\ 2x+3y-2u+2v=0 \end{gathered}$$
2. Sagen Sie wiederum geometrische Deutung und formale Struktur der Lösungsmenge voraus. Lösen Sie dann (unter Nutzung der Besonderheiten des Systems):
$$\begin{aligned} u+2v &= 3 \\ 2v-w &= 4 \\ 3w-2u &= 5 \end{aligned}$$
3. Deuten Sie geometrisch, und lösen Sie (lassen Sie eine kleine Geschicklichkeit dabei walten):
$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{6}z &= 1 \\ \frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z &= 1 \end{aligned}$$
4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (x, y: Unbestimmte, a äußerer Parameter)
$$\begin{gathered} (a-2)x+3y=1 \\ -3x+ay=0 \end{gathered}.$$
Schreiben Sie das System auch in Matrixform, und berechnen Sie die Determinante der Matrix. Was hat sie mit Ihren Lösungen zu tun?
5. Skizzieren Sie im Zweidimensionalen für $\lambda > 1$, was das Rechengesetz $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$ geometrisch bedeutet.
6. Betrachten Sie das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (3,2,4), \vec{x}_Q = (-2,1,-2)$, $\vec{x}_R = (2,1,1)$.
   (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Seitenhalbierende, die von P ausgeht - fassen Sie die Seitenhalbierende als Strecke auf.
   (b) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks PQR bei homogener Massenverteilung.
   (c) Stellen Sie sich nunmehr vor, die Masse des Dreiecks sitze ausschließlich in den Eckpunkten, doch so, dass die Massen in P, Q, R sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. Wie hätte man dann den Schwerpunkt auszurechnen?

Übung (7)

1. Berechnen Sie für folgende Matrizen und Vektoren jeweils „Matrix mal Vektor", so weit das definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = (3).$$

   Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar ist.
2. Seien A, B, C die Matrizen der vorigen Aufgabe 5. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$, $B\vec{y} = \vec{0}$, $C\vec{z} = 0$ sagen? (Unbestimmter Vektor und Nullvektor jeweils passender Länge natürlich.) Rechnen Sie sie nunmehr auch aus. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen beliebiger inhomogener Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, $B\vec{y} = \vec{c}$, $C\vec{z} = \vec{d}$ sagen?
3. Stellen Sie fest, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind: $\vec{x} = (3, -1, 1, 3)$, $\vec{y} = (-2, 3, 1, 2)$, $\vec{z} = (3, 2, 1, -3)$.
4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 30 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, den Cosinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen. Geben Sie nunmehr eine Parameterdarstellung für die Hyperbel, die aus der Hyperbel (bzw. dem Hyperbelast) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ durch diese Drehung entsteht. (Hinweis: Wenden Sie einfach die Drehmatrix auf den Ausdruck einer *Parameterdarstellung* für die ursprüngliche Hyperbel an!)
5. Auf was für Vektoren kann man eine Matrix A mit nur einer Spalte anwenden? Mit was für Matrizen B kann man AB bilden? Welche Dimensionierung hat das Resultat (abhängig von den Dimensionierungen von A, B)? Geben Sie auch den Rechenausdruck für die allgemeine Komponente von AB.
6. Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der $yz-$ Ebene (im $\mathbb{R}^3$) aus? Welche $(3 \times 3)-$ Matrix vertauscht die Komponenten eines Eingabevektors so, dass die erste Komponente an die letzte Stelle rückt, die zweite Komponente an die erste Stelle?
7. Finden Sie die Matrix B, so dass $B \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine allgemeine Regel, wie man sofort die Komponenten der Inversen zu einer $(2 \times 2) -$ Matrix finden kann.

Übung (8)

Alle hier betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen!

1. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (5, -3, -1)$. Welche Länge hat also $(-10, 6, 2)$? Geben Sie einen Vektor vom Betrage 1 an in Richtung von $\vec{a}$.
2. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (2, -2, 3)$ ein? Wie lautet die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$?
3. (a) Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.
   (b) Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) + 3\vec{a}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right)$.
4. Welchen Winkel bildet die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$ Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).
5. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{x} = (3, 2, -4)$ in eine vektorielle Komponente parallel zu $\vec{a} = (1, 2, -3)$ und eine senkrecht zu $\vec{b} = (2, 1, 1)$.
6. Gegeben sei das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (1, 2, 2), \vec{x}_Q = (3, 1, -1), \vec{x}_R = (2, 4, 1)$.
   (a) Geben Sei eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch P geht und den Winkel des Dreiecks bei P halbiert. Nutzen Sie eine naheliegende anschauliche Idee.
   (b) Rechnen Sie auch nach, dass der Winkel halbiert ist.
   (c) Geben Sie eine Formel für die Berechnung der Länge der winkelhalbierenden *Strecke* zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ für ein Dreieck, das mit den linear unabhängigen freien Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bechrieben ist.
7. Sie wissen, dass folgende Ungleichung allgemeingültig ist: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. Welche Ungleichung können Sie daraus für $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ herleiten? Tun Sie das.

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks PQR, $\vec{x}_P = (2,3,4)$, $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$, $\vec{x}_R = (3,1,1)$.
2. Wie können Sie zu einer Geraden (in der Ebene) $y = mx + b$, $m \neq 0$, die Gleichung der dazu senkrechten Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) produzieren? (Stellen Sie die gesuchte Gerade in Normalenform dar, formulieren Sie anschließend die Gleichung für die gesuchte Gerade wieder in Form der Bestimmungsgleichung.)
3. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1,2,2) + \lambda(2,1,-1) + \mu(2,-3,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der $xy-$ Ebene sowie zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P, $\vec{x}_P = (3,4,3)$.
4. Schauen Sie sich die Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = (3,2,-2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (4,-3,3)$ an. Lösen Sie nun die Gleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, indem Sie an die Gleichung geeignete Vektoren skalar anmultiplizieren.
5. Sei
$$M_a = \begin{pmatrix} 2a & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -3a \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $A_a\vec{x} = \vec{b}$ stets eindeutig lösbar?
6. Schneiden Sie die Ebene, die durch $z = y + 1$ im dreidimensionalen Raum beschrieben ist, mit dem Kegel $z^2 = x^2 + y^2$. Wie sieht das Resultat aus? Vergleichen Sie es mit dessen einfachster Form im $\mathbb{R}^2$.
7. Seien $\vec{a} = (2,1,-5)$, $\vec{b} = (1,3,1)$. Schreiben Sie die Vektorgleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ als lineares Gleichungssystem für die Koordinaten von $\vec{x}$, und berechnen Sie die Lösungsmenge. Verstehen und kontrollieren Sie Ihr Resultat auch geometrisch. Welche Bedingung müssen $\vec{a}$, $\vec{b}$ von vornherein erfüllen, damit die Gleichung Lösungen besitzt?
8. Finden Sie die Matrix für eine beliebige Drehung um die $z-$ Achse (im dreidimensionalen Raum). Geben Sie nunmehr eine Parameterdarstellung für eine einfache Gerade auf dem Mantel des Kegels $z^2 = x^2 + y^2$. Gewinnen Sie dann eine ordentliche Parameterdarstellung für den Kegelmantel, indem Sie diese Gerade mit einem beliebigen Winkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, um die $z-$Achse drehen.
9. Finden Sie im $\mathbb{R}^4$ zwei Ebenen, welche nicht parallel sind, doch leeren Schnitt besitzen.