Übung (1)

1. Vereinfachen Sie folgende Rechenausdrücke:

$$\frac{a^3b^4}{a^5b^2},\ \frac{\frac{x^3y^5}{a^3b^4}}{\frac{x^2y^6}{a^7b^3}} \quad = \quad ?\ \text{(Hauptbruchstrich!)},\ \frac{a^3b^4}{x^2y^2z}+\frac{a^4b^5}{x^3y^3u}-\frac{a^5b^3}{x^3y^4v}\ \text{(Ausklammern!)},$$

$$\sqrt[3]{27},\ 64^{-1/4},\ \sqrt{27}.$$

2. Warum gilt $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$? Sprechen Sie genau aus, welche gültige Umformung hier vorliegt. Führen Sie eine solche Umformung mit $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ derart durch, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht.

3. Lösen Sie die Gleichung $(2x-1)^{2/3}=2$.

4. In welche Endform sollte man folgende Gleichung bringen? (Tun Sie das *im Kopf!)*

$$2(x-y)+3(3+2y)+4=5-3x$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge. Geben Sie auch die zugehörige Achsenabschnittsform, und lesen Sie die Achsenabschnitte daraus ab.

5. Sie haben als Spezialfall der allgemeinen binomischen Formel: $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Formulieren Sie, was man wohl genau damit meint, wenn man sagt, dieser Ausdruck sei 'symmetrisch in x und y'. Überlegen Sie, was bei $(x+y+z)^3$ herauskommen sollte - Sie sollten das Resultat formgemäß hinschreiben können, ohne im Einzelnen zu rechnen. Prüfen Sie Ihr Resultat auch durch Abzählen der Summanden der Form $x^ay^bz^c$, die darin vorkommen müssen. Rechnen Sie schließlich das Resultat auch noch genau nach, indem Sie geeignet in die binomische Formel einsetzen (formulieren Sie, was man für was worin einsetzt) und dann vereinfachen und ordnen.

6. Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2-ax+3=0$. (a äußerer Parameter, Unbekannte: x). Beachten Sie: Für jeden reellen Wert von a ist die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ anzugeben. Was für eine Gleichung läge vor, wenn a die Unbekannte und x äußerer Parameter wäre? Geben Sie auch für diesen Fall die allgemeine Lösung.

7. Geben Sie die Gleichung für eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt $(2,-3)$ geht.

8. Bringen Sie die Parabelgleichung $y=3x^2-2x+4$ in Scheitelpunktsform, lesen Sie daraus auch die Koordinaten des Scheitelpunktes wirklich ab.

9. Geben Sie die allgemeine Gleichung für alle Parabeln, welche ihren Scheitelpunkt in $(-2,3)$ haben. Wie viele freie Parameter brauchen Sie? Geometrische Interpretation für freie(n) Parameter?

10. Betrachten Sie die periodische Dezimalzahl $1.123\overline{456}$. Ziel: Darstellung dieser Zahl als rationale Zahl (d.h. Bruch ganzer Zahlen). Anleitung: Zerlegen Sie die Zahl in eine Summe, deren einer Summand s_1 gerade den rein periodischen Anteil ausmacht. Stellen Sie nun für s_1 eine naheliegende Gleichung auf (denken Sie an die Form: $\alpha s_1=s_1+\beta$). Aus der Lösung dieser Gleichung erhalten Sie leicht das gewünschte Resultat. Lösen Sie nunmehr ganz allgemein die Aufgabe, eine Dezimalzahl der Form $m_1...m_r.n_1...n_s\overline{p_1...p_t}$ als Bruch darzustellen. (Mit m_i,n_j,p_k sind hier die Ziffern bezeichnet, mit r, s, t die Längen der jeweiligen Blöcke. - Bei Verständnisschwierigkeiten sollten Sie die Sache am obenstehenden Beispiel konkretisieren.)

Übung (2)

1. Lösen Sie ganz allgemein für zwei Geraden, welche durch die Gleichungen $y = mx + b$, $y = nx + c$ gegeben sind, die Schnittaufgabe. Formulieren Sie, welche Rollen die Buchstaben bei dieser Aufgabe haben. Verfolgen Sie nunmehr auch genau, wie die geometrisch möglichen Situationen den benötigten Fallunterscheidungen für die äußeren Parameter entsprechen.

2. Betrachten Sie die Grundparabel $y = x^2$. Klassifizieren Sie nun für alle Geraden der Form $y = mx + b$, wie deren Schnitte mit der Parabel aussehen, d.h. für alle Paare (m, b) möchte man anhand Ihrer Aufstellung sofort feststellen können, wie viele Schnittpunkte es gibt und auch noch im Falle von zwei Schnittpunkten, ob beide auf einer Seite der Achse liegen oder nicht. Nutzen Sie Ihr Resultat, um schnell die Tangenten an die Parabel vom Punkt $(1, -1)$ aus zu ziehen. (Stellen Sie die Gleichungen für die Tangentengeraden auf.)

3. Lösen Sie die Gleichung $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

4. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-1} = 5$.

5. Sie haben beliebige reelle Zahlen $x_1, ..., x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dazu ist das arithmetische Mittel definiert durch $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. (Konkretisieren Sie das für $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$). Stellen Sie sich nun (für den allgemeinen Fall!) vor, dass man alle Werte x_i ersetzt durch $y_i = x_i - \overline{x}$. Welchen Zusammenhang zwischen $\overline{x}$ und $\overline{y}$ erwarten Sie? Rechnen Sie das nach.

6. Schreiben Sie folgende Summen aus (jeweils wörtlich so, wie sie stehen!):

$$\sum_{i=1}^{3}\left(i + i^2\right), \qquad \sum_{i=1}^{3} i \;+\; \sum_{i=1}^{3} i^2, \qquad \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}(i+3j)\right), \qquad \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}(i+3j)\right),$$

   und sehen Sie ein, dass und warum die ersten beiden und die letzten beiden jeweils denselben Wert ergeben.

7. Schreiben Sie folgende Summen mittels des großen Summenzeichens:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^5}, \qquad 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9}$$

8. Man kann ein Polynom $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ auf folgende Form bringen: $a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\left(... + xa_n\right)\right)\right)$. Tun Sie das in folgendem Beispiel: $2 - 3x + 4x^2 + 5x^3 - 6x^4$. Sehen Sie einen rechnerischen Vorteil bei dieser (sog. Horner-) Form? (Zählen Sie dazu alle jeweils benötigten Additionen und Multiplikationen nach, für die Potenzen entsprechend viele Multiplikationen.) Bekommen Sie diese Abzählung auch für den allgemeinen Fall hin? Zusatzaufgabe: Versuchen Sie sich an einer induktiven Definition der Hornerform, die es insbesondere ermöglichen würde, einem Computerprogramm die Standardform eines Polynoms einzugeben und mit dem Programm die Hornerform ausspucken zu lassen. (Induktion natürlich über den Grad des Polynoms.)

Übung (3)

1. Welche Ordnungsbeziehung können Sie für a^2, b^2 folgern, wenn Sie $a < b$ und $a > 0$ wissen? (Sie dürfen voraussetzen als allgemeingültig: Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $ac < bc$. Dazu: Wenn $a < b$, so $a + c < b + c$.) Welche Beziehung können Sie dagegen für a^3, b^3 folgern, wenn Sie nur $a < b$ voraussetzen? Warum klappt das hier, aber beim Quadrat nicht?

2. Für welche Werte von x wird $-x^2 - 4x + 1 < 0$?

3. Prüfen Sie, welche der folgenden beiden Formeln allgemeingültig sind - im positiven Falle versuchen Sie eine Begründung, im negativen geben Sie ein Gegenbeispiel: $4a^2 + 9b^2 - 12ab \geq 0$. $\sqrt{a} \leq a$.

4. Gilt stets $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$?

5. Verifizieren Sie direkt durch Ausrechnen, dass $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ für $1 \leq k \leq n$.

6. Mit wie vielen Zahlangaben können Sie einen geraden Pyramidenstumpf mit quadratischem Grundriss beschreiben? (Denken Sie an verschiedene Möglichkeiten.)

7. Sie teilen das Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ in n gleich breite Streifen. Geben Sie eine allgemeine Formel für den $i-$ten Zwischenpunkt (ohne a, b). Geben Sie natürlich dazu auch an, welchen Bereich i zu durchlaufen hat.

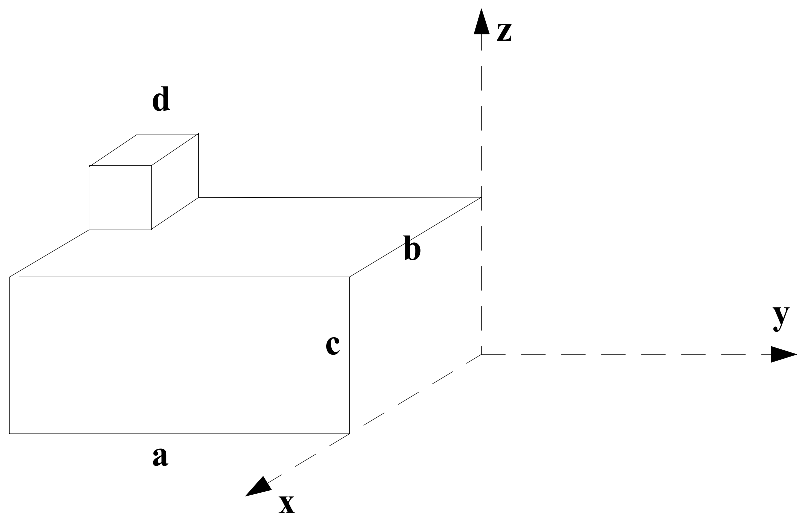
8. Teilen Sie das Quadrat aller Punkte (x, y) der Ebene mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ in ein Gitter ein aus m Streifen in Richtung der $y-$ Achse und n Streifen in Richtung der $x-$ Achse. Beschreiben Sie nun alle Gitterpunkte formelmäßig, unter Einbeziehung der Randpunkte.

9. Sei $a \leq 1$. Zeigen Sie durch Induktion, dass $(1 - a)^n \geq 1 - na$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$. Achten Sie genau auf die Stelle, an der Sie $a \leq 1$ benötigen.

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein.

2. Beschreiben Sie in folgendem Bilde in Koordinatenform (ein Quader mit den Seitenlängen a,b,c, an den Koordinatenebenen anliegend, darauf ein Würfel der Kantenlänge d):



   (a) den Mittelpunkt des kleinen Würfels,
   (b) die obere Würfelseite,
   (c) die Raumdiagonale des kleinen Würfels durch den oberen vorderen Eckpunkt (mit größter $x-$ Koordinate),
   (d) den Schnitt des kleinen Würfels mit der Ebene, in welcher die Raumdiagonalen durch die beiden oberen Eckpunkte mit den größten $x-$ Koordinaten liegen.

3. Wie sieht die Menge aller Punkte in der Ebene aus, deren (kartesische) Koordinatendarstellung (x, y) die Eigenschaft hat: $|x| + 2\,|y| \leq 1$?

4. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P und Q, $\vec{x}_P = (3, -4)$, $\vec{x}_Q = (2, 2)$. Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Winkel bildet sie mit der $x-$ Achse?

5. Welches Gebilde wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben? $\vec{x}(t) = (t, 1 + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. (Kartesisches System.)

6. Welches geometrische Gebilde im $\mathbb{R}^3$ wird durch die Bedingung beschrieben, dass $x^2 + y^2 = 1$ *und* $0 \leq z \leq 3$? (Kartesisches System.)

7. Wie können Sie auf einfache Weise im $\mathbb{R}^2$ die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks verschaffen, dessen eine Kathete die Länge l hat und dessen frei bestimmbarer Winkel an dieser Kathete α ist, $0 < \alpha < \pi/2$? Geben Sie also auf einfache Weise Koordinatendarstellungen für die Eckpunkte eines solchen Dreiecks.

8. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

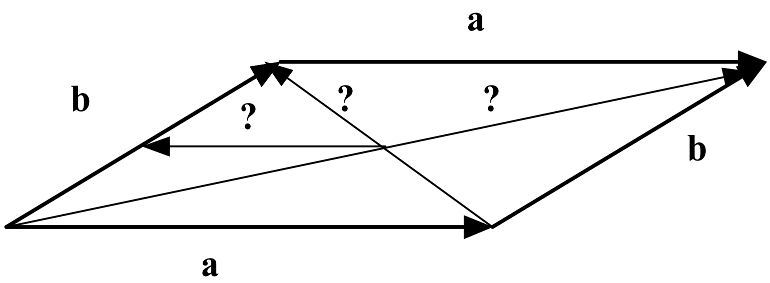
Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Wie viele Teilmengen mit genau drei oder genau fünf Elementen kann man von einer Menge bilden, die 20 Elemente hat?

2. Lösen Sie die Gleichung $x^2 + 2xy - y = 0$, (x Unbestimmte, y äußerer Parameter).

3. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x^2+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = 0$.

4. Drücken Sie in folgendem Bilde die gefragten Vektoren durch die gegebenen aus:



5. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, -3)$, $\vec{x}_Q = (1, 2, 2)$.

   (a) Der Punkt R werde dadurch erreicht, dass man von P nach Q geht und dann in derselben Richtung noch einmal so weit. Geben Sie die Koordinatendarstellung für R.

   (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$.

   (c) Geben Sie *alle* Parameterdarstellungen für die Gerade durch P und Q, bei denen die Strecke $\overline{PQ}$ in einer Zeiteinheit durchlaufen wird (bei Deutung des freien Parameters als Zeit).

6. Geben Sie einen Vektor an, den man *nicht* in der Form $\alpha(2, 1, 2) + \beta(3, -4, 1)$ darstellen kann. Zeigen Sie rechnerisch, dass Ihr Beispiel das Verlangte leistet. Geben Sie auch vorab ein geometrisches Argument dafür, dass es solche Vektoren geben muss.

7. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g.

   (a) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda \le 1$.

   (b) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (3 - \lambda, 2 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (c) Im $\mathbb{R}^2$: $2x = \sqrt{y}$, $y \ge 0$, $y \in \mathbb{R}$.

   (d) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(1, 2) + \mu(3, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   (e) Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1) + \mu(3, 4)$, $0 \le \lambda, \mu \le 1$.

   (f) Im $\mathbb{R}^3$: $z = x - y$ *und* $x = 2z + 2y$. (Vereinfachen Sie die Bedingung, dann finden Sie auch leicht heraus, wie das Gebilde aussieht.)

   (g) Im $\mathbb{R}^3$: $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ *und* $0 \le z \le 2$.

   (h) Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2\lambda - 3\mu + 1, 2\lambda + 3\mu - 1, \lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

8. Geben Sie in kartesischem System die Parameterdarstellung für den Kreis in der Ebene vom Radius 1 mit Mittelpunkt in $(2, 3)$. Projizieren Sie nunmehr alle Kreispunkte parallel zum Vektor $(-1, -1)$ auf die $x-$ Achse, geben Sie also für jeden Kreispunkt formelmäßig den zugehörigen Projektionspunkt an. Zusatzfragen: Welche Strecke auf der $x-$ Achse kommt bei der Projektion des gesamten Kreises heraus, und welcher Teil des Kreises genügt bereits, dies Projektionsbild zu erzeugen? (Diese Fragen kann man sehr leicht anschaulich beantworten.)