

Brückenkurs Mathematik für Studenten des Kommunikationsdesign

T. von der Twer

1 Einleitung

Intention dieses Kurses ist es, einige mathematische Ideen vorzustellen, die Perspektiven auf das weite Feld der Geometrie eröffnen und dabei weitgehend anschaulich behandelt und verstanden werden können und im übrigen ästhetische Relevanz besitzen. (Es wird Hinweise darauf geben, dass diese Ideen auch algebraische und analytische Methoden zu ihrer vollen Entwicklung benötigen, doch kommt es hier nicht darauf an, das genau auszuführen und für technische Beherrschung zu sorgen.)

Im zweiten Abschnitt werden wir einige grundlegende Begriffe einführen, die zur Beschreibung geometrischer Objekte als sehr nützlich sich erwiesen haben. Dabei werden wir Gelegenheit haben, einige grundverschiedene Aspekte des Geometrischen kennenzulernen, die in der Mathematik zu völlig verschiedenen „Geometrien“ führen - dazu gehören auch viel flexiblere Begriffssysteme als das der Euklidischen Geometrie (der ältesten und bekanntesten). Es soll durchaus auch ein Eindruck davon entstehen, wie reichhaltig die mathematische Begriffswelt ist und wie rudimentäre Ideen in natürlicher Weise in mathematische Entfaltung münden. Modernere Elemente sollen nicht völlig ausgespart werden, wie Fraktale, allgemeinere Dimensionsbegriffe oder informationstheoretische Betrachtung.

Die weiteren Abschnitte 3 bis 5 werden jeweils einen Aspekt konkreter ausführen und zur begrifflichen und auch praktisch beobachtenden und konstruktiven Beherrschung von Symmetrie, Zentralperspektive und fraktaler Geometrie führen. (Selbstverständlich sind das erste und dritte dieser Gebiete sehr viel weiter als hier erscheinen kann, aber es entsteht doch wohl mit einfachen Mitteln ein recht gerundetes Bild von diesen Dingen.)

2 Aspekte des Geometrischen und fundamentale Begriffe dazu

Geometrische Begriffe sollen zunächst einmal geometrische Objekte beschreiben, sodann auch geometrische Räume, in denen sich geometrische Sachverhalte wie Beziehungen zwischen Objekten abspielen. Das klingt nicht nur sehr allgemein, sondern ist es auch. Außerordentlich verschiedene Strukturen werden darunter gefasst, schließlich gibt es kaum etwas, das man endgültig aus diesem Bereich ausschließen könnte. Das bedeutet jedoch

nicht, dass der Begriff des „Geometrischen“ seinen Sinn verlöre: In der hier wichtigen *unscharfen* (keineswegs mathematisch präzisierten) Form zielt er stets darauf ab, dass man so etwas wie einen „Raum mit Figuren“ hat, also Metaphern von der räumlichen Anschauung abziehen und mit intuitivem Gewinn verwenden kann. Spricht man von Längen und Winkeln, so handelt es sich um „Geometrie“ in einem engeren Sinn. Punkte, Stecken, Geraden, Dreiecke und Parallelogramme verlangen da schon weniger geometrische Struktur. Betrachtet man nur noch so etwas wie „Nachbarschaft“ (ohne im mindesten Längen zu messen oder messen zu können), so gelangt man zur „weichsten“ oder liberalsten Geometrie, der Topologie. Ihre Begriffe haben sich erst in jüngerer Zeit als erstaunlich fundamental und bedeutsam erwiesen. Die Euklidische Geometrie hat bereits im letzten Jahrhundert eine Schwester bekommen in der Nichteuklidischen, die ihrerseits wiederum verzweigt ist. das war eine große Entdeckung, die geeignet ist, das Wesen mathematischer Begriffsbildung ein wenig näher kennenzulernen:

Die Euklidische Geometrie ist abstrahiert von der Erfahrung mit dem „wirklichen Raum“ der physikalischen Umwelt. „Punkt“ und „Gerade“ sind natürlich Idealisierungen. Hinzu kommen naive Vorstellungen davon, was „offensichtlich“ der Fall ist: Der Raum ist unendlich in dem Sinne, dass es keine Grenze gibt, er ist dreidimensional. Er ist unabhängig von der Zeit und überhaupt von allen Gegenständen, die ihn anfüllen. Wenn man nur ein wenig von moderner Physik gehört hat, so weiß man, wie naiv diese Vorstellungen sind. Was ist daran so naiv? Das Wirkliche - noch dazu das Wirkliche lediglich im Sinne dessen, was so unmittelbar einer bestimmten subjektiven Wahrnehmungsfähigkeit erscheint, wird als das einzig logisch Mögliche aufgefasst, was ein gravierender Fehler ist. Außerdem wird von vagen Vorstellungen, die durchaus verschiedenartiger Präzisierungen fähig sind, nicht nur die Eindeutigkeit angenommen, sondern auch noch naiv vorausgesetzt, dass sich die Wirklichkeit demgemäß verhalte, dass man sie damit also richtig erfasst habe. (Das findet man übrigens häufig in unentwickeltem Denken: Der Raum des logisch Möglichen wird nicht entfernt ausgemessen, sondern eine einfachste Möglichkeit als einzige logische gedacht, somit auch wirklich, da die Wirklichkeit nicht logisch widersprüchlich sein könne.) Aber die intuitive Überzeugungskraft haben die Vorstellungen der Euklidischen Geometrie dank unserer Weise der Anschauung immer noch nicht verloren, so dass man mühelos ihre Attraktivität noch spüren oder sogar feststellen kann, dass man sich die Welt stets noch ihnen gemäß vorstellt. Die fraglose einfache „Richtigkeit“ oder „Wahrheit“ hat die Euklidische Geometrie im 19. Jahrhundert verloren. Das kam so: Man suchte endlich die Frage zu entscheiden, ob das „Parallelenaxiom“ (Inhalt: „Durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden geht genau eine Gerade, die parallel zur ersteren liegt“) aus den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie beweisbar sei. (Mit Axiomen hält man alle für wesentlich erkannten Eigenschaften einer Struktur präzise fest und versucht alle im Zusammenhang interessierenden Dinge daraus herzuleiten.) Das durchaus überraschende Resultat war: Eine solche Herleitung ist *prinzipiell* nicht möglich. Die Tragweite dieses Resultats und übrigens auch der Art seines Beweises kann man kaum überschätzen: Das Resultat macht klar, dass man *logisch verschiedene konsistente Möglichkeiten* hat, eine Geometrie zu entwickeln (einmal so, dass das Parallelenaxiom gilt, und noch dazu auf verschiedene Weisen so, dass es nicht gilt). Damit stellt sich die Fra-

ge danach, wie beschaffen denn nun die physikalische Wirklichkeit sei, verschärft erneut; denn die Gültigkeit des Parallelenaxioms entzieht sich deutlich der empirischen Prüfung. Es wurde der Weg frei dafür, die wesentlichen Eigenschaften des physikalischen Raumes überhaupt noch entdecken zu müssen - ein noch heute nicht abgeschlossener Vorgang. Grundlegend wurde die von der Mathematik des 19. Jahrhunderts entwickelte und von Einstein angewandte Methode, den Raum von lokalen (und daher beobachtbaren) Eigenschaften her zu beschreiben, insbesondere fundamentale geometrische Eigenschaften als lokale zu erfassen. In der Herleitung des Resultats von der Nichtbeweisbarkeit des Parallelenaxioms steckt ebenfalls eine geniale Idee, die allenthalben in der Mathematik wichtig wurde: Zunächst einmal erscheint es gänzlich hoffnungslos, die *Nichtbeweisbarkeit* eines Resultates zu zeigen: Es gibt unendlich viele Beweismöglichkeiten, man kann sie also nicht alle durchheilen, um festzustellen, eine Aussage sei *nicht beweisbar*. Hier ist die geniale Idee: Wenn es eine „Welt“ gibt, in der die Voraussetzungen gelten, die fragliche Aussage indessen nicht, so kann diese Aussage nicht beweisbar sein. Gelingt es also, eine solche „Welt“ zu konstruieren (am Ende noch gerade in der für einzig möglich gehaltenen andersartigen „Welt“, in unserm Beispiel der Euklidischen), so hat man gezeigt, dass die Aussage nicht beweisbar ist. Man weiß dann genau, dass eben auch andersartige „Welten“ konsistent denkbar sind. In unserem Falle ist die Konstruktion einer solchen Welt, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, sogar sehr einfach, solange man sich nur um zu erfüllende Axiome wie „durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade“ kümmert und nicht die deutlich schwierigere (aber mögliche!) Konstruktion von Längen- und Winkelmessung im neuen „Raum“ verlangt:

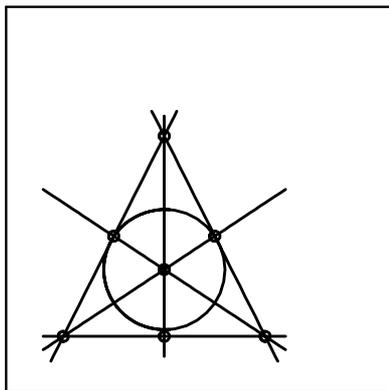
Hier ist das Kleinsche Modell einer Nichteuklidischen Geometrie:

Die „Welt“, der ganze Raum, besteht aus allen Punkten im Innern eines Kreises (der gewöhnlichen Euklidischen „Welt“), die also nicht auf dem Rande liegen. Die Geraden darin sind die Sehnen des Kreises (also ohne die Endpunkte auf der Kreislinie) - offensichtlich sind das in unserem Raum maximale, nicht erweiterbare gerade Stücke im Sinne der Euklidischen Geometrie. Man verifiziert sofort, dass solche Dinge wie „Zwei verschiedene Punkte bestimmen genau eine Gerade“ usw. in unserer konstruierten Welt Gültigkeit haben. Ebenso wie der Begriff der „Geraden“ in unserer Welt eigenartig (eben nur konsistent und die verlangten Eigenschaften erfüllend) frei definiert wurde, definieren wir frei die „Parallelität“ von zwei „Geraden“: Zwei „Geraden“ (d.h. Sehnen) sind parallel, wenn sie einander nicht schneiden - man beachte, dass natürlich alle Formulierungen auf unsere „Welt“ zu beziehen sind: Zwei Sehnen des Kreises schneiden sich in unserer Welt nur dann, wenn ihr Schnittpunkt *innerhalb des Kreises* liegt - die Punkte außerhalb gehören gar nicht unserer „Welt“ an! Man findet nun leicht Sehnen, die in diesem Sinne „parallel“ sind, aber natürlich nicht im Euklidischen Sinne parallel liegen, und so findet man ganz leicht, dass durch einen Punkt außerhalb einer Sehne unendlich viele Sehnen gezogen werden können, die erstere nicht schneiden und somit nach unserer Definition „parallel“ dazu liegen. Wir haben also anstelle einer Parallelen deren unendlich viele. Wir haben eine hyperbolische Nichteuklidische Geometrie definiert (bis auf fehlenden Längenbegriff, der natürlich so gestaltet werden muss und kann (!), dass der Abstand eines Punktes vom Kreisrand unendlich wird).

Das Vorgehen macht klar, welche immensen Freiheiten in der mathematischen Begriffsbildung stecken, und die Physik macht klar, dass man solch freie Konstruktion von Strukturen zur Beschreibung der Wirklichkeit auch braucht - mit den geringfügigen naiv zugänglichen kommt man für die komplizierte Wirklichkeit nicht entfernt aus.

Betrachten wir in diesem Zusammenhang noch den Begriff der „Unendlichkeit“ eines Raumes: Die Euklidische Idee konstruiert die Unendlichkeit als Gleichartigkeit aller Punkte, Homogenität und Isotropie des Raums: An jedem Punkt und in jeder Richtung sieht er gleich aus. Es geht aber auch anders: Ein Raum kann endliches Volumen haben und doch *unbegrenzt* sein in dem Sinne, dass man nirgend vor einen „Bretterzaun“ stößt - man denke an eine Kugeloberfläche, auf der zweidimensionale Wesen wohnen: Auf Geraden - das sind hier die Großkreise - können sie unbegrenzt fortlaufen, aber die Länge eines Großkreises ist endlich.

Setzen wir ein gänzlich anderes Beispiel dagegen und betrachten eine endliche Geometrie: Unser ganzer „Raum“ besteht aus nur endlich vielen Punkten, und es werden jeweils gewisse Teilmengen davon als „Geraden“ aufgefasst. Das Wichtige daran: Auch dies kann man so machen, dass die üblichen Axiome der Geometrie erfüllt sind - allein dies rechtfertigt überhaupt den Namen einer „endlichen Geometrie“ - wir beschränken uns auf die Dimension 2: Folgende Skizze zeigt ein ganz simples Modell dafür, dass so etwas bereits mit wenigen Punkten möglich ist:



(Beachten Sie, dass die „Geraden“ nicht etwa die eingezeichneten Strecken sind, sondern abstrakter lediglich die Mengen der zugehörigen Punkte. Auch der eingezeichnete Kreis ist in unserem Modell eine „Gerade“, genauer ist nur die Menge der drei darauf liegenden Punkte als Gerade aufzufassen. Also haben wir sieben Geraden in unserem Raum, die jeweils aus genau drei Punkten bestehen.) Wir beobachten in unserer kleinen Geometrie folgende bemerkenswerte Eigenschaften: Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt; Wenn wir die Punkte als „Geraden“ auffassen und umgekehrt die Geraden als Punkte, so erhalten wir eine isomorphe Geometrie - es sind lediglich die Namen ausgetauscht. Folgendes Axiomensystem ist mit unserem Modell erfüllt, wie man leicht nachprüft - jede Struktur, die das tut, nennt man eine projektive Ebene:

Axiom 1 *Es gibt wenigstens vier Punkte, unter denen keine drei auf einer Geraden liegen.*

Axiom 2 *Auf jeder Geraden gibt es mindestens zwei Punkte.*

Axiom 3 *Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, auf der diese Punkte liegen.*

Axiom 4 *Zu zwei verschiedenen Geraden gibt es genau einen (Schnitt-) Punkt, der auf beiden liegt.*

Interessant daran ist weiter, dass dies System auch unendliche Modelle hat. Allerdings kann man nicht einfach die Euklidische Ebene mit ihren Punkten und Geraden (hier „Geraden“ im naiven gewohnten Sinne!) nehmen - warum? Wir werden das daraus durch Erweiterung zu gewinnende unendliche Modell später kennenlernen und mit Gewinn bei der Zentralperspektive verwenden.

Es sei betont, dass mit der erwähnten Freiheit mathematischer Ideen- und Begriffsbildung nicht der übliche postmoderne Quatsch gemeint ist, der aus aller Erkenntnis alle Konturen verschwinden sieht, alles im Subjektiven auflöst und sich aufgeklärt fühlt darin, jede Korrektheit im Sinne von Logik oder Übereinstimmung einer Beschreibung mit der Wirklichkeit zu leugnen. Von einer ziemlich freien Konstruktion hat der Mathematiker oder mathematische Physiker durchaus zu zeigen, dass man damit etwas verstehen, korrekte Resultate produzieren kann usw.

Wenden wir uns nunmehr einigen konkreten geometrischen Beschreibungskategorien zu, deren Verschiedenartigkeiten durchaus zu tun haben mit dem angesprochenen philosophischen Thema: Die Kategorien beziehen sich auf verschiedene geometrische Beschreibungsebenen und auch verschiedene mathematische Strukturen, insbesondere feinere und gröbere. Es ist eine wichtige Feststellung, dass man in gewissen Strukturen einige Begriffe zur Verfügung haben kann und andere überhaupt nicht. Das macht „Geometrie“ in einem viel allgemeineren Sinn anwendbar. Der Hauptzweck unserer Vorstellung einiger geometrisch beschreibender Begriffe ist es jedoch, den Sinn für die entsprechenden Eigenschaften zu schärfen, etwas bewusst zu machen.

2.1 Grundbegriffe für Euklidische und auch Nichteuklidische Geometrien, allgemeiner für metrische Geometrien

Hier können wir von Punkten, Geraden und Ebenen reden, von geometrischen Gebilden oder Figuren als Mengen von Punkten, von Schnittgebilden zweier solcher Figuren („Inzidenzgeometrie“), darüber hinaus aber auch von Winkeln und Längen. Das kann man abschwächen und nur noch den Begriff des Abstandes zwischen zwei Punkten bewahren. Solche Abstände kann man beispielsweise sinnvoll verwenden auch dann, wenn die „Punkte“ ihrerseits schon recht komplizierte oder abstrakte Gebilde sind, nicht nur geometrische Figuren, sondern vielleicht auch Funktionen oder Begriffe.

2.2 Topologie als fundamentale Geometrie

In der Topologie vergisst man alles Messen von Abständen, intuitiv denkt man sich alle Gebilde wie aus idealem Gummi. Dann ist nicht nur ein Kreis dasselbe wie ein größerer Kreis, sondern auch dasselbe wie ein Quadrat oder auch unregelmäßiges Sechseck oder ein beliebiger unregelmäßiger Kartoffelumriss. Lediglich „Nachbarschaft“ gibt es als Grundbegriff. Ein Kreis ist *nicht* dasselbe wie eine Acht, eine Hohlkugel nicht dasselbe wie eine volle. Denn Trennen verletzt die Nachbarschaftsbeziehung. Auch bleibt der Dimensionsbegriff noch von unterscheidender Kraft: Ein dreidimensionaler Quader ist nicht dasselbe wie eine zweidimensionale Fläche, etwa ein volles Quadrat oder Rechteck (oder Kreis, was wiederum dasselbe wäre): Man kann intuitiv einsehen und auch zeigen, dass man bei dem erforderlichen „Plattdrücken“ Nachbarschaftsbeziehungen verletzen müsste - Umgebungen würden auseinandergerissen.

2.3 Zusammenhang und Glattheit

Wir sahen, dass „Zusammenhang“ bereits in der Topologie auftritt, die ein zerrissenes Gebilde von einem zusammenhängenden unterscheidet und im übrigen das Zusammenhängen einer Kreislinie von dem einer Strecke - letztere kann man nicht einmal so durchtrennen, dass noch etwas Zusammenhängendes bleibt, wohl aber die Kreislinie. Eine Acht kann man gar zwei mal durchtrennen und noch Zusammenhängendes bewahren. Aber die Topologie unterscheidet nicht etwa zwischen Kreis und Quadrat, man benötigt eine feinere geometrische Struktur, um „glatt“ und „eckig“ zu unterscheiden.

2.4 Zum Begriff der Dimension

„Dimension“ ist so etwas wie ein grober Begriff von Größe, zu unterscheiden allerdings von Ausdehnungsmaßen wie Länge, Flächeninhalt oder Volumen (auch in höheren Dimensionen als 3 zu gebrauchen): Im Sinne der Dimension ist ein winziger Quader „größer“ als eine riesige Kreisfläche, eine winzige Kreisfläche größer als eine riesige Kreisrandlinie. Punkte haben Dimension Null, Kurven Dimension Eins, Flächen Dimension Zwei, Körper Dimension Drei, usw. Im einfachen Fall ist Dimension eines Gebildes zu definieren als die Anzahl der unabhängigen Zahlangaben, die man benötigt, um einen Punkt dieses Gebildes genau zu beschreiben. Schon hier stiftet der Fall einer gekrümmten Fläche, sagen wir einer Kugeloberfläche, Verwirrung: Eine falsche Intuition stellt sich bereitwillig ein, dass diese Fläche dreidimensional sei, weil nicht im zweidimensionalen Raum unterzubringen. Unsere Definition stellt eindeutig klar, dass die Dimension Zwei ist - Längen- und Breitengrad genügen, weniger reicht nicht, um einen beliebigen Punkt zu charakterisieren. Der tiefere Sinn davon wird jedoch erst dann offenbar, wenn man bedenkt, dass die vermeintliche Notwendigkeit der Einbettung der Kugeloberfläche in den dreidimensionalen Raum überhaupt nicht besteht: Mathematisch lässt sich der Raum der Kugeloberfläche allein intrinsisch, d.h. „von innen heraus“ beschreiben, ohne von irgendeinem einbettenden dreidimensionalen Raum zu sprechen! Man charakterisiert dazu die Punkte durch Zahlenpaare und beschreibt *lokal*, für jeden Punkt, die Krümmung, was tatsächlich intrinsisch

möglich ist - eine noch tiefere Einsicht der Mathematik des 19. Jahrhunderts (Gauß und Riemann) als die der Existenz Nichteuklidischer Geometrien, auf der die gesamte moderne Raumauffassung der modernen Physik fußt.

Aber man kann den Dimensionsbegriff noch wesentlich allgemeiner fassen und retten. Man hat ihn auch gegenüber dem genannten verfeinert, um ein Phänomen angemessener zu beschreiben, das in jüngster Zeit besondere (auch ästhetische) Aufmerksamkeit erregt hat: Wie sieht es mit der Dimension von „Fraktalen“ aus? Man denke an eine Küstenlinie, die glatt immer nur bei gewisser Vergrößerung wird. Löst man feiner auf, so sieht man im Kleinen wieder dasselbe Mäandern wie im größeren Maßstab. Das ist das Phänomen der Selbstähnlichkeit. Hier noch ein paar einfachere konstruktive Beispiele: Man trenne aus einer Strecke das mittlere Drittel heraus, dann aus den verbleibenden Teilstrecken wieder jeweils das mittlere Drittel, dann immer so fort. Was bleibt, ist die klassische „Cantorsche Menge“, die keinerlei Kontinuität mehr aufweist. Ähnlich kann man einen Kubus fraktal durchlöchern („Sierpinski-Schwamm“). Oder man baut auf statt ab: An ein gleichseitiges Dreieck setze man auf die Seiten über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck an, lasse dann das mittlere Drittel fort, betrachte also nur den äußeren Umriss. So fahre man immer fort mit jeder begrenzenden Strecke. Es entsteht eine fraktale „Schneeflocke“, mit der sogenannten Kochschen Kurve als Begrenzungslinie, die bei feiner Auflösung jede Glattheit vermissen lässt. Vielleicht leuchtet es schon intuitiv ein, dass die Dimensionen derartiger Gebilde gebrochene Zahlen sein sollten, eben weil es sich um „Zwischen-Fälle“ handelt: Letztere Kochsche Kurve sollte eine Dimension > 1 erhalten (im Gegensatz zum oben angeführten Dimensionsbegriff, wonach sie als Dimension einer Kurve 1 beträgt - daran ändern die folgenden Überlegungen nichts). Ebenso sollte die Cantormenge eine Dimension zwischen 0 und 1 erhalten, während sie bei größerer (topologischer) Betrachtungsweise einfach Null wird. Diese Idee wollen wir mathematisch etwas genauer ausführen und uns in die Lage versetzen, die zugehörigen „fraktalen“ Dimensionen wirklich zu berechnen. Zugleich liefert das ein gutes Beispiel für die Art, wie man mathematisch eine Idee zu einfachen Beispielen ausweitet und tragfähig macht für sehr viel schwierigere Fälle:

Wir gehen aus von einer einfachen Idee zu den Dimensionen 1, 2, 3. Nehmen wir eine Strecke, nehmen ihre Länge als Einheitslänge und schauen nach, wie viele Strecken $N(\varepsilon)$ einer Bruchteil-Länge ε benötigt werden, um die ursprüngliche Strecke zu bedecken. Wir finden ganz einfach

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^1}.$$

Führen wir dasselbe mit einem Quadrat von Einheits-Kantenlänge durch: Wie viele Quadrate $N(\varepsilon)$ des „Durchmessers“ ε benötigt man, um das große zu überdecken? Offenbar gilt hier

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Analog finden wir für einen Kubus

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3}.$$

Wir abstrahieren zur *allgemeineren Definition*:

Dimension = die Zahl D , für die in diesem Sinne gilt: $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^D}$, d.h.

$$D = -\frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}, \text{ wobei man } \varepsilon \text{ gegen Null gehen lässt.}$$

Man kann nun schön einsehen, dass dieser Dimensionsbegriff, der für die Standardfälle 1, 2, 3 das Gewohnte auf neue Weise produziert, auch auf unsere raffinierteren Beispiele anwendbar ist: Wenn wir bei der Kochschen Kurve von ε zu $\varepsilon/3$ übergehen, so benötigen wir 4 mal so viele Strecken, da jede Seite jeweils durch 4 Seiten von $1/3$ der ursprünglichen Kantenlänge ersetzt wird. Das bedeutet

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = 4N(\varepsilon).$$

Laut unserer Definition haben wir

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^D}.$$

Das ergibt angewandt auf $\varepsilon/3$:

$$N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{3^D}{\varepsilon^D}.$$

Zusammen mit der ersten Gleichung haben wir also

$$\frac{3^D}{\varepsilon^D} = \frac{4}{\varepsilon^D},$$

und das ergibt

$$3^D = 4,$$

also gilt

$$(\text{Fraktale}) \text{ Dimension der Kochschen Kurve} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26.$$

Aus dieser Prozedur ermitteln wir allgemeiner, dass man bei einem selbstähnlichen Gebilde bekommt:

Die fraktale Dimension selbstähnlicher Gebilde mit $N\left(\frac{\varepsilon}{b}\right) = a \cdot N(\varepsilon)$ beträgt $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

Dies liefert für den Fall der Cantorschen Menge unmittelbar die Dimension $\ln(2)/\ln(3) \approx 0.63$. Das entspricht der Intuition, dass diese Menge „weniger“ ist als ein Kontinuum, aber doch „mehr“ als einzelne isolierte Punkte.

2.5 Komplexität, Information und Symmetrie

Ende der Vierziger Jahre dieses Jahrhunderts machte Claude Shannon Furore mit einem System von Begriffen und Resultaten, das sich um die Begriffe „(Un) Ordnung“, „Komplexität“, „Information“, „Redundanz“, „Entropie“ rankt. Information aufzunehmen, das bedeutet, Signale zu empfangen. Wieviel Information steckt in den Signalen? Das hängt offenbar von der Verteilung der Häufigkeiten ab, mit der die einzelnen Signale vorkommen. Deutsche Wörter fangen oft mit „S“ an - es wird schwierig, das ganze Wort zu erraten. Mit einem Anfangsbuchstaben „X“ steht das ganz anders. Die stärkste mittlere Information pro Zeichen hätten wir, wenn alle Symbole rein zufällig vorkämen - eine zugehörige Sprache könnten wir mangels Redundanz nicht bewältigen. Entropie ist ein Maß für Unordnung, Zufälligkeit. Man beachte, dass diese Begriffe universell anwendbar sind, auf die „Pixel“ (Bildpunkte) eines Bildes ebenso wie auf Laute oder Zeichenketten. Jede Sprache hat eine Entropie, sei es geschriebenes oder gesprochenes Englisch oder Deutsch, sei es die „Sprache“ eines Komponisten oder die „Sprache“ eines Malers. (Auch in der Physik sind die zugehörigen Begriffe relevant, nicht nur in der Nachrichtentechnik.)

Wir wollen diese Dinge nicht mathematisch im Detail verfolgen, sondern stattdessen am Beispiel eines Bildes illustrieren, wie „Ordnung“ oder „Unordnung“ hineinspielen. Nehmen wir ein Bild, das eine Spiegelsymmetrie aufweist: Automatisch reduziert sich der Informationsgehalt auf die Hälfte - kennt man eine der beiden Seiten, so kennt man perfekt auch die andere, wenn man nur die (sehr kurze!) Information über die Symmetrieachse hat. So ist eine komplizierte gotische Kathedrale menschlich einigermaßen erfassbar, weil sie vielfältige Symmetrien besitzt: Neben die bilaterale bezüglich des senkrechten Schnittes mitten durch das Langhaus tritt eine solche für das Querschiff, für den Aufriss eines einzelnen Joches, weiter vielfältige Translationen mit der Wiederholung der einzelnen Joche im Langhaus, in den Seitenschiffen usw. Hinzu kommen Ähnlichkeitstransformationen, die Strukturen von kleineren Teilen auf größere übertragen. Dazu kommen freilich auch viele Einzelformen, die sich nicht wiederholen und ziemlich unregelmäßig sind (Ausgestaltungen von Kapitellen, Fenstergestaltungen usw.). Insgesamt scheint das Miteinander von Ordnung und Unordnung für die ästhetische Qualität wichtig zu sein. Auch bei Bildern ist dergleichen zu beobachten, obgleich es darin selten eine ungestörte Symmetrie gibt: Ein „Bild“ von Zufallspixeln würde kaum jemand als Bild akzeptieren, sondern als „uninteressantes Rauschen“ abtun. Auch in abstrakten Bildern ist es typisch, dass man „Figuren“ von einem „Hintergrund“ unterscheiden kann, Farb- und Form-Wiederholungen lassen Partien als zusammengehörig erkennen, Objekte daraus formen - unter Umständen liegt ein Reiz darin, dass dies vom Betrachter recht selbständig und individuell vorzunehmen ist. „Kraftzentren“ lassen sich ausmachen, kompositorische Aufteilung und Achsenbildung usw. All dies lässt irgendwie „verstehen“, lässt einige Informationen nicht in einem Rauschen untergehen, senkt die Entropie des Bildes, macht es einfacher, komprimierbar.

Im folgenden Text werden wir zwei Weisen der Informationsreduktion genauer kennenlernen, die beide unmittelbar ästhetische Qualitäten konstituieren können: Symmetrien im nächsten Abschnitt 3 und die Selbstähnlichkeit, eine andere Art von „Wiederholung“,

im Abschnitt 5.

3 Symmetrie

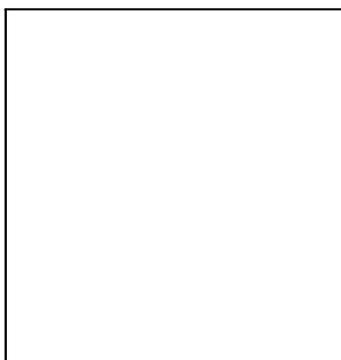
Das Wort „Symmetrie“ bedeutet so etwas wie „Gleichmaß“, dass eines mit einem anderen zu messen sei. Dies erinnert sogleich daran, dass man die (Längen und Winkel messende) Euklidische Basisgeometrie bei der Prägung dieses Begriffes im Auge hatte. Da Symmetrie in diesem Rahmen durchaus eine bedeutende Rolle spielt, werden wir uns weitgehend damit beschäftigen, aber doch die Verallgemeinerungen nicht ganz aussparen. Hinzu kommt, dass auch der engere Rahmen interessante Phänomene zeigt und darüber hinaus zu wirklicher Klärung eine nicht unbeachtliche begriffliche Anstrengung erfordert, die erst im 19. Jahrhundert bewältigt wurde und zu einer wichtigen mathematischen Struktur führt, der „Gruppe“. (Bis auf den letzten Unterabschnitt werden wir stets im Rahmen der euklidischen Geometrie sprechen.)

3.1 Typen von Symmetrien in der Ebene und im dreidimensionalen Raum

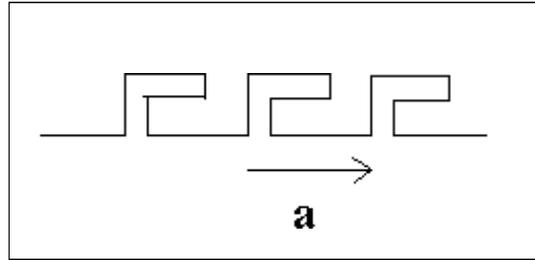
Wir führen nicht sogleich die besagte Struktur aller Symmetrie ein, sondern wollen uns zunächst einen Überblick darüber verschaffen, was für Symmetrien möglich sind. Dazu beobachten wir einfach einzelne Symmetrien in Beispielen und versuchen sie zu typisieren.

3.1.1 Beispiele für die Ebene

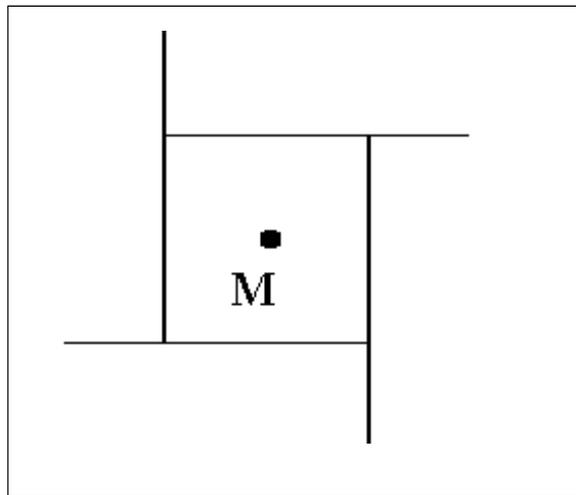
- Ein gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck hat offensichtlich eine einzige bedeutsame Symmetrie, nämlich Spiegelsymmetrie bezüglich der offensichtlichen Achse (Höhe vom Eckpunkt zwischen den gleichlangen Schenkeln, Achse a im Bild):



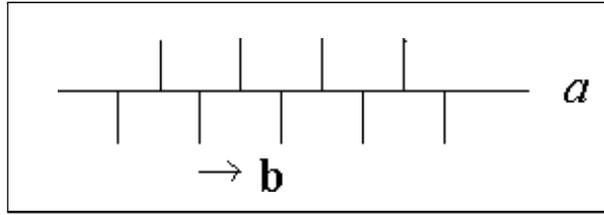
- Ein Mäander der folgenden Art, das wir uns als beidseitig unendlich fortgesetzt denken, hat offenbar keinerlei Spiegelsymmetrie, wohl aber eine Translations- oder Parallelverschiebungs-Symmetrie, mit dem offensichtlichen Verschiebungsvektor \mathbf{a} .



- Folgende Figur hat offenbar nur eine wesentliche Drehsymmetrie - Spiegelungen und Translationen sind mit ihr nicht möglich. Der (kleinste) Drehwinkel ist offenbar 90 Grad. Es genügt, diesen anzugeben - die Vielfachen verstehen sich von selbst. Der Mittelpunkt **M** der einzig möglichen Drehungen ist offenbar der Schwerpunkt der Figur.



- Hier ist eine sehr einfache Figur, die wir uns wieder idealisierend als beidseitig ins Unendliche fortgesetzt denken. Klar haben wir eine Translationssymmetrie, aber die ist nicht das Interessante, sondern Kern der Symmetrie ist so eine „Zickzack“-Bewegung nach rechts (oder auch links), und aus diesem versteht sich auch die Translation als Folgerung. Man nennt das eine Gleitspiegelung, weil man den Übergang der Figur in sich selbst so gewinnen kann: An der eingezeichneten Achse *a* spiegelt man *und* gleitet zugleich um den Verschiebungsvektor **b** nach rechts (wahlweise auch nach links, dazu gehört der umgekehrte Verschiebungsvektor). Gemeint ist die Hintereinanderschaltung beider Operationen als *eine* Operation - die einzelnen Verfahren stellen für sich keine Symmetrien dar: Spiegelt man allein, so kommen die Striche auf die falschen Höhen, ebenso durch die Verschiebung allein.



3.1.2 Verallgemeinerung für den dreidimensionalen Raum

Die betrachteten Typen kehren hier wörtlich oder sinngemäß wieder: Translationen funktionieren völlig analog. Spiegelungen kann man zwar auch an Geraden oder Punkten vornehmen, wie man sich klarmache. Aber das Analogon zur Spiegelung an einer *Achse* im Zweidimensionalen ist doch die Spiegelung an einer *Ebene* im Dreidimensionalen. Ähnlich, aber schärfer, entspricht der Drehung um einen Punkt im Zweidimensionalen die Drehung um eine Achse im Raume - eine Drehung um einen Punkt wäre hier mit einer einzigen Winkelangabe überhaupt nicht definiert! Aufgabe: Man finde sämtliche Symmetrien eines Würfels.

3.1.3 Der genaue Begriff einer einzelnen Symmetrie (einer beliebigen geometrischen Figur) als Symmetrieabbildung des Raumes (der betreffenden Dimension)

Wir wollen das strukturelle Gemeinsame aller Beispiele genau beschreiben - insbesondere bei der Erläuterung des Gleitspiegelungsbeispiels mussten wir schon starken Gebrauch vom genaueren Verständnis machen. Um eine Symmetrie einer Figur zu beschreiben und auch das Bestehen dieser Symmetrie prüfen zu können, muss man eine *Operation* angeben, die folgendes tut: Sie ordnet *jedem* Punkt P des *ganzen* Raumes eindeutig einen Punkt P' zu. („Translation mit Vektor \mathbf{a} “, „Spiegelung an Achse a “, „Drehung um Punkt M mit dem Winkel α im Uhrzeigersinn“, „Gleitspiegelung an Achse a mit Verschiebungsvektor \mathbf{b} “ sind alle von dieser Art, für die Ebene. Man beachte, dass wir hier auch schon alle Elemente aufgeführt haben, die nötig sind, eine solche Symmetrieoperation eindeutig zu charakterisieren - jeder Mensch könnte mit einer solchen Anweisung die Operation mit den Punkten einer ganzen Figur ausführen, und jeder hätte bei korrekter Befolgung dasselbe Resultat.) Nun kommen zwei wesentliche Bestimmungsstücke, die aus einer solchen Operation erst eine Symmetrie der fraglichen Figur machen:

1. Die Operation muss die Figur *in sich* überführen, d.h. jeder Punkt der Figur wird in einen Punkt der Figur abgebildet. Zu beachten ist dabei, dass *keineswegs* jeder Punkt der Figur auf *denselben* abgebildet werden muss. (Eine Translation mit einem Vektor, der einer Länge größer als Null hat, lässt offenbar keinen einzigen Punkt fest, eine Drehung um einen Punkt nur diesen, eine Spiegelung an einer Achse nur diese Achse.)
2. Die Operation darf nicht eine beliebige Zuordnung von Punkten zu Punkten sein, vielmehr muss es eine *Symmetrieoperation* sein, die das „Gleichmaß“ zwischen einer

Figur und ihrem Abbild garantiert. Das präzisiert sich im Sinne der Euklidischen Geometrie nun gerade darin, dass Längen und Winkel erhalten bleiben.

Wir fassen das Ganze zusammen:

Definition 1 (der Begriffe „Symmetrieeoperation“ und „Symmetrie einer Figur“):

- 1.) Eine **Symmetrieeoperation** ist eine Abbildung des Raums in sich, die Längen und Winkel erhält, also unverändert lässt.
- 2.) Eine (**einzelne**) **Symmetrie** einer Figur F ist eine solche Symmetrieeoperation, die F in sich selbst überführt. (D.h. die Operation, nennen wir sie φ , hat die Eigenschaft, dass für alle Punkte $P \in F$ gilt: $\varphi(P) \in F$.)

Erläuterung: Wir fassen Figuren auf als Menge ihrer Punkte. $P \in F$ bedeutet: Der Punkt P gehört zur Figur, ist Element dieser Punktmenge. $\varphi(P)$ (lies: „ φ von P “) ist der Punkt P' , in den die Operation φ den Punkt P überführt. Gefordert wird gerade, dass der wieder zur Figur gehört. Verifizieren Sie unbedingt, dass dies gerade der Kern dessen ist, was wir meinen, wenn wir sagen, ein Rechteck, das kein Quadrat ist, habe zwar eine Drehung mit 180 Grad als Winkel, jedoch im Gegensatz zum Quadrat keine Drehsymmetrie mit 90 Grad: Drehen Sie das (echte, oblonge) Rechteck *wirklich* mit 90 Grad: Es erscheinen Punkte, die vorher *nicht* da waren, zwei Rechtecke sind da. Hier ist ein naheliegendes Missverständnis auszuräumen: Es ist durchaus sinnvoll, zwei kongruente Figuren, z.B. Rechtecke, als *gleich* zu betrachten. Aber in unserem Zusammenhang ist das gerade *nicht* sinnvoll: Alles hängt vielmehr daran, dass wir eine Figur als Menge ihrer Punkte verstehen, also mit fixierter Lage. *Dann* ist klar, dass die Drehung um 90 Grad keine Symmetrie des oblongen Rechtecks bildet, wohl aber des Quadrats. Es sollte einleuchten, dass diese Betrachtungsweise gut ist, weil ein Quadrat sicherlich als „symmetrischer“ denn ein oblonges Rechteck ist.

Wenn der Begriff verstanden ist, so sollte auch unmittelbar einleuchten, dass eine Figur, die eine Translationssymmetrie besitzt mit einem nichttrivialen Vektor (ungleich Null), jedenfalls zweiseitig unendlich ausgedehnt sein muss.

3.2 Die Struktur der Gesamtheit der Symmetrien einer Figur: Die Symmetriegruppe einer Figur

Wir kommen nun zum etwas tiefergehenden Zusammenhang zwischen den einzelnen Symmetrien, diese bilden nicht einfach einen ungeordneten Haufen. Es wird sich lohnen, diesen Zusammenhang zu verstehen; denn man kann mit seiner Hilfe wirklich sicherstellen, dass man *alle Symmetrieeoperationen*, die möglich sind, und im Falle einer Figur *alle Symmetrien der Figur* erfasst. Außerdem braucht man dann nicht alle aufzuzählen, sondern

es genügen im allgemeinen recht wenige, aus denen der ganze Rest dann „folgt“. Gestiftet wird der Zusammenhang durch folgende einfache rein logische Beobachtung: Zwei Operationen kann man stets hintereinander ausführen, wenn die zweite für die Resultate der ersten definiert ist. Unsere Symmetrieeoperationen kann man stets hintereinander ausführen, da sie stets auf dem ganzen Raum definiert sind. Genauer versteht man die Hintereinanderschaltung so:

Sind φ, ψ Symmetrieeoperationen, dann ist die Operation $\psi \circ \varphi$ (lies: „ ψ hinter φ “) definiert durch: $(\psi \circ \varphi)(P) = \psi(\varphi(P))$. Das heißt: Man wendet zuerst φ auf P an, erhält damit einen Punkt P' , wendet auf diesen ψ an und erhält das Endresultat, in das $\psi \circ \varphi$ direkt (auf einmal) den Punkt P überführt.

Erinnerung: Eine Gleitspiegelung hatten wir in diesem Sinne als Hintereinanderschaltung einer Translation hinter eine Spiegelung eingeführt. Wir haben nun zur Hintereinanderschaltung folgendes zu einer schönen Struktur führende

Resultat (und Definition des Begriffs der Gruppe):

- 1.) Die Hintereinanderschaltung zweier Symmetrieeoperationen ergibt eine ebensolche. Die Hintereinanderschaltung zweier Symmetrien einer Figur ergibt wieder eine Symmetrie der Figur.
- 2.) Jede Symmetrieeoperation hat eine Umkehrung, die ebenfalls wieder eine Symmetrieeoperation ist. Die Umkehrung einer Symmetrie einer Figur ist wiederum eine Symmetrie der Figur. (Bezeichnung: Die Umkehroperation zu φ bezeichnen wir mit φ^{-1} .)
- 3.) Die Identität id , definiert durch $id(P) = P$ für alle Punkte des Raums, ist die triviale Symmetrieeoperation. Sie ist eine Symmetrie *jeder* noch so unsymmetrischen Figur.
- 4.) Bezüglich der Hintereinanderschaltung gelten im Rahmen der Menge aller Symmetrieeoperationen (oder auch aller Symmetrien einer Figur) folgende Gesetze:

$$\begin{aligned} \vartheta \circ (\psi \circ \varphi) &= (\vartheta \circ \psi) \circ \varphi \\ id \circ \varphi &= \varphi \\ \varphi^{-1} \circ \varphi &= id \end{aligned}$$

Damit wird jede dieser Mengen von Operationen zu einer **Gruppe**. (Dieser Begriff ist gerade dadurch definiert, dass man eine Verknüpfung „ \circ “ hat, die eben diese Axiome erfüllt. Ihre Gültigkeit für die angegebenen Bereiche wollen wir sogleich verifizieren.)

- 5.) Mit 4.) ergibt sich sofort: **Die Symmetrien einer beliebigen Figur F bilden mit der Hintereinanderschaltung stets eine Gruppe, genannt „die Symmetriegruppe von F “.**

Zur Begründung und Erklärung:

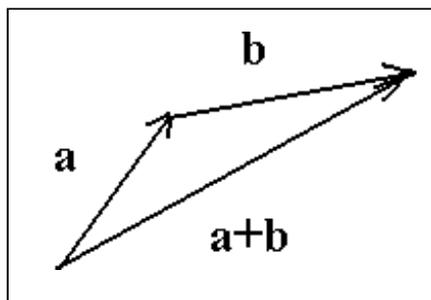
- Zu 1.)** Wenn eine erste Abbildung angewandt wird, die Längen und Winkel unverändert lässt, dann eine zweite mit derselben Eigenschaft, so sind offenbar insgesamt Längen und Winkel unverändert geblieben. Wenn eine erste Abbildung Elemente von F in ebensolche überführt, eine zweite danach dasselbe tut, so sind insgesamt Elemente von F wieder in Elemente von F überführt.
- Zu 2.)** Dies können wir mit unseren bisherigen Mitteln nicht sogleich allgemein begründen, aber wir können es für unsere vier Grundtypen von Symmetrien verifizieren. Später werden wir sehen, dass sich alle Symmetrieoperationen aus unseren Grundtypen durch (wenige) Hintereinanderschaltungen erzeugen lassen, und daraus ergibt sich leicht die allgemeine Begründung zusammen mit der entsprechenden Feststellung für die Grundtypen, die wir hier leicht treffen können: Die Drehung um M mit dem Winkel α im Uhrzeigersinn wird offenbar umgekehrt durch die Drehung um denselben Punkt mit demselben Winkel, nur entgegen dem Uhrzeigersinn. Eine Spiegelung ist offenbar ihre eigene Umkehrung. Eine Translation mit dem Vektor \mathbf{a} wird umgekehrt durch die Translation mit dem (umgedrehten) Vektor $-\mathbf{a}$. Eine Gleitspiegelung an der Achse a mit dem Vektor \mathbf{b} wird umgekehrt mit der Gleitspiegelung an derselben Achse und dem Vektor $-\mathbf{b}$. Schließlich überführt auch stets die Umkehrabbildung φ^{-1} eine Figur F in sich selbst, wenn φ das tut, da φ dann auch stets Punkte, die nicht zu F gehören, in ebensolche abbildet.
- Zu 4.)** (Nummer 3.) ist wohl unmittelbar einsichtig.) Die erste Gleichung, das Assoziativgesetz, ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Hintereinanderschaltung:

$$\begin{aligned}(\vartheta \circ (\psi \circ \varphi))(P) &= \vartheta((\psi \circ \varphi)(P)) = \vartheta(\psi(\varphi(P))), \text{ und ebenso} \\ ((\vartheta \circ \psi) \circ \varphi)(P) &= (\vartheta \circ \psi)(\varphi(P)) = \vartheta(\psi(\varphi(P))).\end{aligned}$$

Und zwei Abbildungen sind genau dann gleich, wenn ihre Resultate auf allen Punkten miteinander übereinstimmen. Die beiden anderen Formeln drücken unmittelbar die definierenden Eigenschaften der Identität und der Umkehrabbildung (zu einer gegebenen) aus. Es sei noch darauf hingewiesen, dass derlei Rechengesetze nicht eben unbekannt sind: Man ersetze \circ durch „mal“ (Multiplikation bei Zahlen), id durch die Zahl 1, verstehe „hoch minus Eins“ als Kehrwertbildung bei Zahlen $\neq 0$, dann hat man die wesentlichen Rechengesetze der Multiplikation bei Zahlen, bis auf eines, nämlich die Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$. Es ist zu beachten, dass diese Kommutativität für unsere Hintereinanderschaltung (\circ) *nicht* gilt, wie wir im nächsten Unterabschnitt konkret sehen werden, wenn wir betrachten, was bei einigen Hintereinanderschaltungen unserer Grundsymmetrien herauskommt.

3.3 Systematisch wichtige Resultate bei der Hintereinderschaltung von Symmetrien

Zwei Translationen, mit Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} verkettet ergeben offenbar wieder eine Translation, und zwar mit dem Vektor $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, den man gemäß folgender Skizze ermittelt:



Zwei Drehungen um *denselben* Punkt M ergeben hintereinander geschaltet offenbar eine ebensolche. Drehungen um verschiedene Punkte ergeben jedoch im allgemeinen eine Translation und eine Drehung.

Zwei Spiegelungen *an parallelen Achsen*, die nicht zusammenfallen, ergeben eine Parallelverschiebung, und zwar mit einem Vektor, der senkrecht auf den Achsen steht und doppelt so lang ist wie der Achsenabstand. Wichtig dabei ist: Wenn man zuerst an Achse a , dann an der parallelen Achse b spiegelt, so zeigt dieser Vektor von a in der Richtung nach b . Bei umgekehrter Reihenfolge ist es umgekehrt. Man erhält die Umkehrabbildung, mit dem umgedrehten Translationsvektor. Dies ergibt sich auch abstrakt aus folgender Gleichung, die man unmittelbar einsieht:

$$(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}.$$

Veranschaulichung: Wenn man die Operation „zuerst Strümpfe anziehen und dann Schuhe anziehen“ umkehren will, so muss man zuerst die Schuhe ausziehen, dann die Strümpfe, also zuerst die letzte Operation rückgängig machen, dann die erste. Wenn nun φ , ψ beide Spiegelungen sind, also ihre eigenen Umkehroperationen, so hat man *speziell*: $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi$, und handelt es sich wie beschrieben um Spiegelungen an parallelen Achsen, so ist $\varphi \circ \psi$ eine Translation, $\psi \circ \varphi$ dagegen die umgekehrte Translation, was nicht dasselbe ist - wenn es sich nicht gerade um den Nullvektor handelt. Insbesondere haben wir also ein substantielles Beispiel für die Nichtkommutativität von \circ .

Zwei Spiegelungen *an Achsen, die einander in einem Punkte schneiden*, ergeben eine Drehung um diesen Schnittpunkt, und zwar mit dem doppelten Winkel zwischen den Achsen. Ausführen der Spiegelungen in anderer Reihenfolge ergibt die umgekehrte Drehung, also mit umgekehrtem Drehsinn, wieder nicht dasselbe, wenn die Achsen nicht zusammenfallen.

Insgesamt erhalten wir das folgende

Resultat (zum möglichen Aufbau aller Symmetrieoperationen aus Spiegelungen):

Translationen und Drehungen lassen sich als Hintereinanderschaltungen von Spiegelungen darstellen.

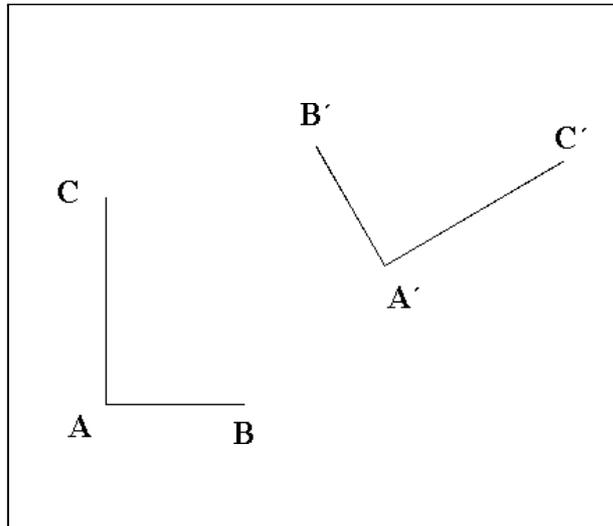
Vorsicht: Wenn eine Figur eine Drehsymmetrie oder Translationssymmetrie besitzt, so muss sie nicht die Spiegelsymmetrien besitzen, aus denen man jene erzeugen kann. Unsere Drehfigur oben zeigt ein Beispiel dafür. Dennoch ist die Beobachtung sehr nützlich: Wenn man erzeugende Spiegelungen als Symmetrien schon hat, so muss man Erzeugnisse wie Drehungen oder Translationen schon nicht mehr aufzählen. Dazu ein

Beispiele: Alle Symmetrien eines Quadrats ergeben sich durch Hintereinanderschaltung aus zwei Spiegelungen (eine an einer Diagonalachse, eine an einer seitenhalbierenden Achse). Alle Symmetrien unseres Drehfigurenbeispiels lassen sich aus einer einzigen Drehung um 90 Grad erzeugen - es gibt dagegen keinerlei Spiegelsymmetrie, was so einen „dynamischen“ Eindruck erzeugt, der sich natürlich bei anderen Grundformen verstärkt, man denke an Windmühlenflügel.

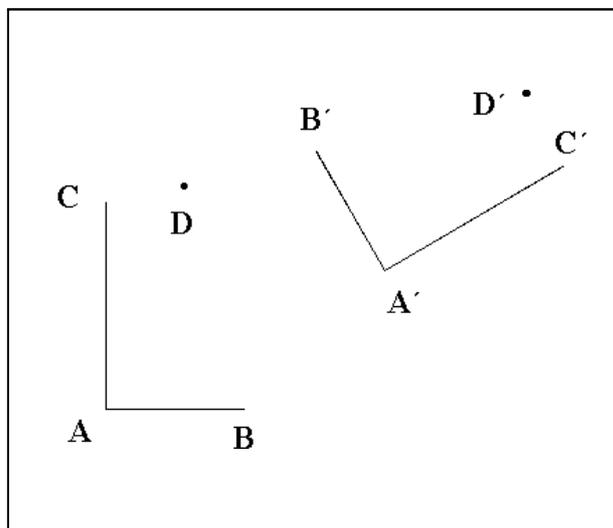
3.4 Die Vollständigkeit unserer Symmetriebeschreibung im Rahmen der Euklidischen Geometrie: Alle denkbaren Symmetrien sind erfasst mit den Spiegelungen und deren Hintereinanderschaltungen

Wir haben bereits die entscheidende theoretische Frage angedeutet und wollen sie nunmehr wirklich klären: Haben wir *alle möglichen Symmetrien* erfasst? Gibt es nur unsere Grundtypen und deren Hintereinanderschaltungen? Wie kann man so etwas überhaupt wissen? Solch allgemeine Aussagen sind für die entwickelte Mathematik völlig selbstverständlich, und es steht zu ihrem Beweise ein riesiges Arsenal zur Verfügung. Hier wollen wir die Gelegenheit nutzen, am Beispiel den Grundansatz für derartige Überlegungen darzutun. Eine Gesamtheit ist zu beherrschen, im Beispiel: „Alle möglichen Symmetrien“. Mathematisch fragt man dann weiter, was die wesentlichen strukturellen Eigenschaften dieser Objekte sind. Im Beispiel sind das die definierende Eigenschaft - Längen und Winkel bleiben erhalten - und die Gruppenstruktur, die mit der Verkettung \circ gegeben wird. Nun legt sich eine Vermutung nahe (das verläuft in unserem Beispiel durchaus einfacher als gewöhnlich): Man hofft, dass sich *alle* Symmetrieoperationen als Verkettung von Operationen unserer Grundtypen darstellen lassen. (Wir werden sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist.) Um dies zu realisieren, müssen wir wiederum unserer Leitidee folgen, nämlich einsehen, dass eine beliebige Symmetrieoperation aufgrund ihrer definierenden Eigenschaft, Längen und Winkel zu erhalten, recht eingeschränkt ist, aus sehr wenigen „Bestimmungsstücken“ eindeutig zu definieren. Damit werden diese Operationen so handhabbar, dass die erhoffte Aussage leicht verifiziert werden kann. Das wollen wir nun durchführen für den Fall des zweidimensionalen Raumes:

Betrachten wir, wie eine Symmetrieoperation φ auf ein Zweibein oder auch ein Dreieck wirkt; das sieht im Prinzip (im allgemeinsten Fall) so aus, weil Längen und Winkel erhalten bleiben (ABC : Original, $A'B'C'$: Bild davon unter φ):

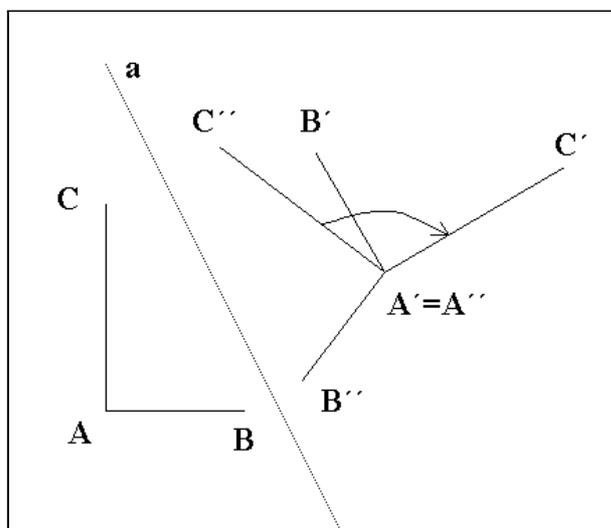


φ macht also aus dem ursprünglichen Zweibein ein neues, das gegenüber dem ersten verschoben, gedreht und eventuell noch in seiner Orientierung verändert sein kann. (Im gezeichneten Beispiel sind alle drei Veränderungen geschehen.) Wichtig ist nun folgende Feststellung: Wenn eine *beliebige* Symmetrieoperation ψ die drei Eckpunkte A, B, C genau auf dieselben Punkte abbildet wie φ das tut, *dann folgt bereits* $\varphi = \psi$. Es müssen dann also alle Punkte überhaupt von ψ gerade so abgebildet werden wie von φ . Man sieht das leicht so:



Wir haben vorgegeben, dass ABC auf $A'B'C'$ abgebildet wird. Der beliebig gewählte Punkt D muss dann auf D' abgebildet werden - es gibt keine andere Möglichkeit, da sonst die Abstände zwischen D' und jeweils A', B', C' nicht dieselben wie zwischen D und jeweils A, B, C sein könnten. (D' ergibt sich eindeutig als Schnittpunkt dreier Kreise.) So werden demnach alle Punkte mit dem Dreieck starr mitbewegt. So weit die einschränkende Eigenschaft. Sie hat folgende Konsequenz: Wenn es uns nur gelingt, eine Verkettung von unseren Standard-Symmetrieoperationen wie Drehungen, Translationen

und Spiegelungen zu finden, die ABC auf $A'B'C'$ abbildet, dann wissen wir: Sie ist gleich φ , und so haben wir φ wie verlangt dargestellt. Das ist aber nun sehr einfach: Verschieben wir zuerst A nach A' mit dem Vektor, der von A nach A' geht. Dann drehen wir das entstandene Zweibein um den Punkt A' , so dass die gewünschten Richtungen herauskommen. Schließlich - nur im Falle, dass wie im skizzierten Beispiel φ die Orientierung ändert - spiegeln wir noch an der winkelhalbierenden Geraden zwischen den Schenkeln. Diese Verkettung bildet das Dreieck wie φ ab und stimmt demnach mit φ völlig überein. Da wir Translationen und Drehungen wiederum wie oben erwähnt als Verkettung von Spiegelungen darstellen können, haben wir insgesamt das Resultat, dass sich sämtliche möglichen Symmetrieoperationen sogar als Hintereinanderschaltungen von Spiegelungen darstellen lassen. Wir wollen uns nur noch ein wenig Mühe geben, die benötigte Anzahl der Spiegelungen zu ermitteln, mit der man im ungünstigsten Fall auskommt. Unsere darum unbekümmerte Überlegung ergäbe 5 als ausreichende Zahl, aber es geht besser, wie man an folgender Skizze sieht:



Anstelle der ersten Translation nehmen wir zunächst eine einfache Spiegelung an a vor, der Mittelsenkrechten auf der Strecke von A nach A' . Damit geht ABC über in $A''B''C''$, wobei $A'' = A'$ ist. Für den gezeichneten Fall, dass φ die Orientierung ändert, brauchen wir nur noch zu drehen mittels zweier Spiegelungen und sind insgesamt mit drei Spiegelungen ausgekommen. Falls φ die Orientierung erhält, geht es noch einfacher: Nach unserer ersten Spiegelung haben wir ein Zweibein, das spiegelbildlich (um die offensichtliche Achse durch A') zum gewünschten Endresultat liegt. Wir kommen also mit nur zwei Spiegelungen aus. Fassen wir zusammen:

Resultat (Darstellbarkeit aller Symmetrieoperationen durch Spiegelungen):

- 1.) Jede orientierungserhaltende Symmetrieoperation in der Ebene kann als Produkt zweier Spiegelungen (an Achsen) dargestellt werden.
- 2.) Jede orientierungsumkehrende Symmetrieoperation in der Ebene kann als Produkt von höchstens drei Spiegelungen dargestellt werden.

Bemerkung: Insbesondere kann jede Symmetrieoperation in der Ebene als Produkt von Translationen, Drehungen und Spiegelungen geschrieben werden. Aber es ist nicht möglich, jede Symmetrieoperation durch Translationen und Drehungen darzustellen, da deren Verkettung immer zu einer die Orientierung erhaltenden Abbildung führt, also niemals eine Spiegelung ergeben kann. Symmetrieoperationen, welche die Orientierung erhalten, können dagegen im kompliziertesten Fall stets durch eine Translation hinter eine Drehung geschaltet dargestellt werden.

- 3.) **Verallgemeinerung für den dreidimensionalen Raum:** Jede Symmetrieoperation im dreidimensionalen Raum kann durch eine Verkettung von höchstens vier Spiegelungen (an Ebenen) dargestellt werden. (Dazu überlegt man analog mit einem Dreibein anstelle eines Zweibeins.)

3.5 Zur Bestimmung der Symmetriegruppe einer vorgelegten Figur.

Es sei gleich erwähnt, dass diese Aufgabe beliebig schwierig sein kann. Wir beschränken uns hier jedoch im wesentlichen auf die Ebene, und zudem soll es uns genügen, lediglich ein minimales Erzeugendensystem für die Symmetriegruppe einer Figur (oder eines Musters) zu geben. Wir gehen nicht genauer auf die algebraische Struktur von Gruppen ein, im mathematischen Sinne ernsthaft kompliziertere Gruppen treten in unserem Rahmen nicht auf. Immerhin sind wir dank des Resultates vom letzten Abschnitt in der Lage, keine anderen als unsere Standard-Symmetrieoperationen aufsuchen zu müssen. Weiter wissen wir mit der Gruppenstruktur der Gesamtheit aller Symmetrien einer Figur, dass wir, wenn wir bereits einige Symmetrien genannt haben, deren Umkehrungen und Hintereinanderschaltungen nicht mehr erwähnen müssen. (Die Identität brauchen wir überhaupt nicht zu nennen.) Das heißt, wir brauchen nur einen solchen Satz von Symmetrien zu nennen, der gerade ausreicht, mittels dieser Verknüpfungen jedes beliebige Element der Symmetriegruppe darzustellen. Wir suchen also ein (möglichst minimales) Erzeugendensystem für die fragliche Gruppe. Dazu noch einmal genauer folgende

Definition 2 (Erzeugendensysteme einer Gruppe):

- 1.) Ein Erzeugendensystem für eine Gruppe G mit der Gruppenoperation \circ ist eine derartige Teilmenge G' von G , dass man jedes Element $g \in G$ darstellen kann in der Form

$$g_1^{(-1)} \circ \dots \circ g_n^{(-1)} = g,$$

und zwar mit Elementen $g_1, \dots, g_n \in G'$. (Der eingeklammerte Exponent -1 bedeutet: Wahlweise kann er stehen oder fehlen.)

- 2.) Ein minimales Erzeugendensystem ist ein solches, von dem man kein Element wegnehmen kann, ohne dass es die Eigenschaft verliert, Erzeugendensystem zu sein.

Ein kleinstmögliches Erzeugendensystem ist ein solches, das die minimale Anzahl von Elementen besitzt, die ein Erzeugendensystem nur haben kann (das macht auch Sinn für unendliche Anzahlen).

Bemerkung: Es gibt gewöhnlich eine Vielzahl auch noch von *minimalen* (und sogar *kleinstmöglichen minimalen*) Erzeugendensystemen einer Gruppe. Die gestellte Aufgabe ist dann auf verschiedene Weisen *korrekt* lösbar. Ein kleinstmögliches Erzeugendensystem, das *nur endlich viele Elemente enthält*, ist sicher minimal. (Bei unendlichen Erzeugendensystemen gilt dies nicht!) Umgekehrt muss ein minimales Erzeugendensystem (auch im endlichen Fall) keineswegs ein kleinstmögliches sein (vgl. zu all diesen Bemerkungen das erste der folgenden Beispiele).

Beispiele für Symmetriegruppen und Erzeugendensysteme

- 1.) Die Symmetriegruppe in unserem Mäanderbeispiel wird erzeugt von einer einzigen (nichttrivialen) Translation - es ist die mit dem kürzestmöglichen Vektor, gleichgültig, welche Richtung man wählt. Nennen wir sie τ , so bildet offensichtlich $\{\tau\}$ ein minimales und auch kleinstmögliches Erzeugendensystem bildet. An diesem einfachen Beispiel kann man bereits klarmachen, dass es auch andere minimale Erzeugendensysteme gibt, und zwar auch solche, die *nicht* kleinstmögliche sind: $\{\tau^{-1}\}$ ist ein *anderes kleinstmögliches* Erzeugendensystem. $\{\tau^{-2}, \tau^3\}$ ist dagegen ein *minimales, aber nicht kleinstmögliches* Erzeugendensystem unserer Gruppe. Denn $\tau^{-2} \circ \tau^3 = \tau$, und mit τ kann man die ganze Gruppe erzeugen; ferner können wir von beiden Elementen τ^{-2}, τ^3 keines fortlassen: τ^{-2} oder τ^3 *allein* kann nicht die kurze Translation τ erzeugen. (Kleines Problem zur Anregung: Finden Sie zu unserer Gruppe *beliebig lange minimale* Erzeugendensysteme. Hinweis: Die Sache fällt vermutlich leichter mit der sogleich eingeführten additiven Schreibweise für kommutative Gruppen.) Übrigens ist unsere Symmetriegruppe im Beispiel ausnahmsweise kommutativ, und sie wird von τ gerade so erzeugt, wie die Gruppe der ganzen Zahlen ($\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) mit der Addition als Verknüpfung von der Zahl 1 erzeugt wird. Daher schreibt man solche Gruppen auch gern mit „+“ statt „o“. Man beachte: Ist $\tau_{\mathbf{a}}$ die Translation mit dem Vektor \mathbf{a} , so hat man $\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}} = \tau_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$, $\tau_{\mathbf{a}}^k = \tau_{k\mathbf{a}}$, für jede ganze Zahl k . Additiv geschrieben haben wir also mit $-2\tau, 3\tau$ simpel $-2\tau + 3\tau = \tau$. (Wir identifizieren die Translation mit ihrem Vektor, und aus der Verknüpfung wird einfach die Vektoroperation.)
- 2.) Die Symmetriegruppe eines Quadrats wird offenbar von zwei Spiegelungen erzeugt (kleinstmöglich), wahlweise ebenso von einer Spiegelung und einer Drehung um 90 Grad. Man braucht also nur 2 Symmetrien zu nennen (statt 8 - dabei ist die Identität!). Der entsprechende ökonomische Vorteil wird deutlicher, wenn wir die 240 Symmetrien eines regelmäßigen 120-Ecks ebenfalls nur mit zwei Spiegelungen erzeugen. Eine Drehfigur ohne Spiegelsymmetrie hat eine noch einfachere Gruppe, die von nur einem Element zyklisch erzeugt wird. Bei n -facher Drehsymmetrie, einer „ n -zähligen Achse“, sind es n Drehungen, die von einer einzigen erzeugt

werden. Ist dagegen eine Spiegelung σ dabei, so erhält man alle Symmetrien durch Bilden von allen Paaren $\tau, \sigma \circ \tau$, wobei τ alle Drehungen durchläuft. Man kommt dann auf Verdopplung der Zahl der Drehungen. Auf diese Weise sollte man einsehen, dass ein Würfel 48 Symmetrien hat, die von nur vieren (einer Spiegelung und drei Drehungen) erzeugt werden können. (Leitende Frage: Wie viele wieviel-„zählige“ Drehachsen gibt es?)

- 3.) Die Symmetriegruppe des Kreises ist irgendwie besonders einfach - alle Drehungen um den Mittelpunkt. Doch unter dem Gesichtspunkt ihrer Erzeugung ist sie ganz entsetzlich: Es bedarf überabzählbar vieler erzeugender Elemente (Grund: Es gibt überabzählbar viele irrationale Drehwinkel) - man kann diese Unendlichkeit also nicht wie die der natürlichen Zahlen durch fortgesetzte endliche Aufzählung schließlich ausschöpfen. Ähnlich steht es mit der Symmetriegruppe des ganzen Raumes, die aus allen Symmetrieeoperationen überhaupt besteht.

3.6 Eine geometrische Möglichkeit zum Nachweis dafür, dass ein System von Symmetrien eine Symmetriegruppe bereits erzeugt

Im Falle des Mäanderbeispiels konnten wir die ganze Symmetriegruppe leicht überblicken und ohne Schwierigkeiten feststellen, dass diese Gruppe von einer einzigen Symmetrie erzeugt wird. Problematischer ist das bei komplizierteren Symmetriegruppen: Woher kann man wissen, dass man nicht doch (etwa bei einem Muster) eine Symmetrie übersehen hat? Tatsächlich ist das vielfach gar nicht schwierig, wenn man folgendes Resultat benutzt. Dazu benötigen wir folgende Begriffe:

Definition 3 („Aus einer Punktmenge mittels einer Menge von Symmetrieeoperationen (geometrisch) erzeugte Punktmenge“ und „Fundamentalgebiet“):

- 1.) Sei M eine Menge von Symmetrieeoperationen, P eine beliebige Menge von Punkten. Dann ist $M(P)$, die aus P mittels M erzeugte Punktmenge, die kleinste Menge, die P enthält und alle Symmetrien aus M besitzt. Man erhält $M(P)$, indem man alle aus M algebraisch (durch Umkehrbildung und Verkettung) erzeugbaren Symmetrien auf alle Punkte von P anwendet. (Konkreter kann man sich das so vorstellen, dass man der Reihe nach zu P alle Punkte hinzufügt, die jeweils durch Anwenden einer Operation aus M oder deren Umkehrung entstehen, aus der jeweils vorhandenen bereits vergrößerten Punktmenge (beim ersten Mal ist es nur P allein).
- 2.) Ein Fundamentalgebiet einer geometrischen Figur F ist eine solche Punktmenge $H \subseteq F$ (d.h. H ist eine Teilmenge von F), die einerseits nicht mehr von Symmetrien von F zerlegt werden kann, aus der aber F durch die Symmetriegruppe G_F von F erzeugt wird. Zusätzlich soll H die Eigenschaft haben, dass für alle Symmetrieeoperationen (des betreffenden Raums, sei er zwei- oder dreidimensional) α, β gilt: Stimmen α und β auf H überein, so gilt $\alpha = \beta$. (Das heißt: H muss Punkte

enthalten, die im zweidimensionalen Fall ein Zweibein, im dreidimensionalen ein Dreibein bilden.) Man beachte: Es gibt meist durchaus viele Fundamentalgebiete, noch dazu verschiedener geometrischer Gestalten.

Resultat (über den Zusammenhang zwischen algebraischem Erzeugen der Symmetriegruppe G_F einer Figur F und geometrischem Erzeugen der Figur aus einem Fundamentalgebiet):

Eine Menge G' von Symmetrien aus der Gruppe G_F bildet genau dann ein Erzeugendensystem für G_F , wenn es gelingt, aus einem Fundamentalgebiet H von F *allein mittels der Symmetrien aus G'* die gesamte Figur F (geometrisch) zu erzeugen, wenn also gilt: $G'(H) = F$.

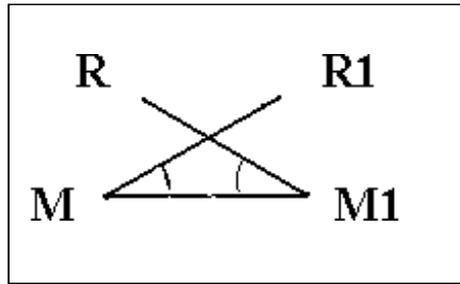
Zum Beweis: Zuerst sehen wir ein: Wenn G' ein Erzeugendensystem für G_F bildet, dann gilt $G'(H) = F$. Denn jeder Punkt Q von F liegt in $G_F(H)$, da H Fundamentalgebiet ist. Man erhält ihn also als $Q = g(P)$ mit einem Punkt $P \in H$ und einer Operation $g \in G_F$. Ist G' Erzeugendensystem für G , so ist $g = \alpha_1^{(-1)} \circ \dots \circ \alpha_n^{(-1)}$ mit $\alpha_i \in G'$, $1 \leq i \leq n$. Also haben wir $\alpha_1^{(-1)} \circ \dots \circ \alpha_n^{(-1)}(P) = Q$. Damit ist $Q \in G'(H)$. Da Q beliebig aus F war, haben wir $G'(H) \supseteq F$. $G'(H) \subseteq F$ ist ohnehin klar, da $H \subseteq F$ und G' nur Symmetrien von F enthält. Nunmehr interessieren wir uns für die andere Richtung der Behauptung des Satzes - es ist für die intendierte Anwendung die wichtigere: Wenn $G'(H) = F$ gilt, dann ist G' auch ein Erzeugendensystem für G_F . Dazu sei g ein beliebiges Element von G_F . Wir müssen zeigen, dass g sich in der Form $\alpha_1^{(-1)} \circ \dots \circ \alpha_n^{(-1)}$ mit $\alpha_i \in G'$, $1 \leq i \leq n$, darstellen lässt. Wir können sofort $g \neq id$ annehmen, da die Identität jedenfalls erzeugt wird. Betrachten wir dazu das Gebilde $H' =$ Menge der Punkte, auf welche g die Punktmenge H (direkt) abbildet. Wir haben $H' \neq H$, da sonst $g(\neq id)$ eine Zerlegung von H erlauben würde, entgegen der Voraussetzung, dass H Fundamentalgebiet ist. Nun haben wir $G'(H) = F$. H' entsteht also insbesondere aus den Punkten von H durch Anwendung der von G' algebraisch erzeugten Symmetrieoperationen. Wichtig ist: H' entsteht als Fundamentalgebiet „auf einmal“ (bis auf Ränder), so dass es *eine einzige* Operation $g' = \alpha_1^{(-1)} \circ \dots \circ \alpha_n^{(-1)}$ gibt mit $\alpha_i \in G'$, $1 \leq i \leq n$, welche H auf H' abbildet. Damit muss aber g' mit g auf der Punktmenge H übereinstimmen; denn andernfalls hätten wir mit $g^{-1} \circ g'$ eine Abbildung, die H in nichttrivialer Weise auf sich selbst abbildet und eine Symmetrie von F ist, was nicht sein kann, da H Fundamentalgebiet ist. Da nun aber g' und g auf H dieselben Abbildungen sind, so sind sie als Symmetrieoperationen überhaupt gleich, weil H definitionsgemäß ein k -Bein der zugehörigen Dimension enthält. Damit ist g in der verlangten Weise dargestellt und gezeigt, dass G' die Gruppe G_F erzeugt.

Wir haben damit ein geometrisches Kriterium dafür zur Hand, mit dem wir prüfen können, ob die Symmetrie einer Figur mit der Angabe eines gewissen Satzes von Symmetrien bereits vollständig beschrieben ist. Wir werden es im übernächsten Abschnitt ausführlich auf einige Beispiele anwenden.

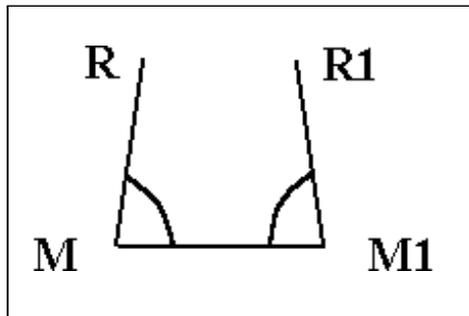
3.7 Die möglichen Drehsymmetrien bei diskreten Mustern, welche die Ebene füllen

Wir stellen mit dem Titel ein Problem, das offensichtliche Ähnlichkeit mit dem der Bestimmung aller möglichen Symmetrieeoperationen aufweist: *Alle Möglichkeiten* sind auszuschöpfen (in einem zunächst unüberschaubaren unendlichen Gebiet). Selbstverständlich gibt es Figuren, welche drehsymmetrisch mit beliebigem Winkel sind, der Kreis lässt gar als einzelne Figur gleich *alle* Drehungen um seinen Mittelpunkt zu. Rosetten mit beliebiger Anzahl gleicher Facetten realisieren beliebige Bruchteile des Vollwinkels als Drehwinkel. Oder man fülle mit dem trivialen „Muster“: „Alles schwarz“ die Ebene: Das ist - wie eben der gesamte Raum - bezüglich aller Symmetrieeoperationen überhaupt symmetrisch. Interessant ist das Problem dagegen gerade für die ins Auge gefassten *diskreten* Muster, das meint solche, die durch Vervielfältigung einer beschränkten in sich nicht weiter symmetrischen Figur von einem Flächeninhalt > 0 entstehen. „Vervielfältigung“ bedeutet genauer: Das Ganze entsteht durch abzählbar unendliche Wiederholung - abzählbar wie die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Jedes Element wird nach endlich vielen Schritten „eingefangen“. Gerade dies ist mit „diskret“ gemeint. Wir können den Begriff auch so umschreiben, dass es einen Mindestabstand $d > 0$ zwischen *verschiedenen* Punkten A und A' gibt, die durch eine Symmetrie des Musters ineinander überführt werden können. Diese Beschreibung erweist sich nun als sehr nützlich für das Verständnis der möglichen Drehwinkel.

Zunächst einmal beobachten wir, dass folgende Drehwinkel möglich sind bei diskreten Mustern: 60 Grad, 90 Grad, damit selbstverständlich auch alle Vielfachen, also mit den Gradzahlen 120, 180, 240, 270. (Den „trivialen“ Fall eines Vielfachen von 360 Grad lassen wir als uninteressant beiseite.) Finden Sie selber einfache Kachelungen, welche diese Drehsymmetrien aufweisen. Nun lautet die entscheidende Frage: Gibt es keine weiteren, oder stellen wir uns nur zu ungeschickt an, wenn wir keine mehr finden? Hier eine typisch mathematische Denkfigur: Nehmen wir an, ein Drehwinkel unter 60 Grad, aber über 0 Grad, sei möglich, Drehung um den Punkt M . (Man ziehe für die folgende Überlegung die untenstehende Skizze heran.) Nun liege M_1 im oben erwähnten Mindestabstand d zu M , und es gebe irgendeine Symmetrie des Musters, die M in M_1 überführt. (Nach Voraussetzung über die Konstruierbarkeit des Musters muss es einen solchen Punkt M_1 geben! Drehung um M_1 ist dann mit demselben Winkel möglich. Drehung um M und Drehung um M_1 in entgegengesetztem Sinn, beide mit demselben Winkel α unter 60 Grad, führen zu Resultaten $R \neq R_1$. Diese Punkte sind durch eine Symmetrie des Musters ineinander überführbar (drehe R in M , überführe mit der nach Konstruktion existierenden Symmetrie M in M_1 , schließlich diesen Punkt durch Drehung in R_1 . Damit haben wir aber einen Widerspruch: Nach Voraussetzung können keine Punkte des Musters, die in geringerer Entfernung voneinander liegen als M und M_1 , durch eine Symmetrie des Musters ineinander übergehen. Der Abstand zwischen R und R_1 ist aber kleiner. (Man beachte: Bei genau 60 Grad wird $R = R_1$, und das ergäbe keinen Widerspruch. Bei 0 Grad wird der Abstand nicht geringer, wieder kein Widerspruch.)



In allen anderen Fällen kann man analog auf einen Widerspruch schließen, wenn man die Existenz eines Drehwinkels außer unseren gewöhnlichen annimmt. Wir beachten dazu, dass überhaupt nur die Fälle „echt zwischen 60 und 90 [90 und 120, 120 und 180]“ zu betrachten sind, da man eine Drehung mit einem Winkel über 180 Grad auch als Drehung im umgekehrten Sinne mit einem Winkel unter 180 Grad auffassen kann. Der Fall „über 60, aber unter 90“ erledigt sich mit folgender Skizze, analog zur ersten zu verstehen:



Auf abstrakterem Wege wollen wir die letzten beiden erwähnten Fälle erledigen: Hat α einen Wert echt zwischen 90 und 120 Grad, so liegt 3α echt zwischen 270 und 360 Grad, das ergibt eine schon als unmöglich erkannte Drehung im entgegengesetzten Sinne mit einem Winkel zwischen 0 und 90 Grad, außer im Falle, dass α gerade 100 Grad hat. Dann ergibt 4α aber 400 Grad, was dasselbe wie 40 Grad ist, wiederum unmöglich. Liegt das Maß von α echt zwischen 120 und 180 Grad, so liegt das von 2α (echt) zwischen 240 und 360 Grad, was einen Drehwinkel (echt) zwischen 0 und 120 Grad ergibt. Von denen sind nur 60 und 90 möglich. Im ersten Falle musste α einen Wert von 150 Grad haben, dann aber 5α den Wert 750 Grad, was 30 Grad entspricht - und 30 Grad sind unmöglich. Im zweiten Falle wäre α vom Werte 135 Grad, damit aber 3α von 405 Grad, d.h. 45 - wieder ein unmöglicher Winkel.

3.8 Alle siebzehn Symmetriegruppen diskreter Muster, welche die Ebene füllen (mit Erzeugendensystemen und Realisierungsbeispielen)

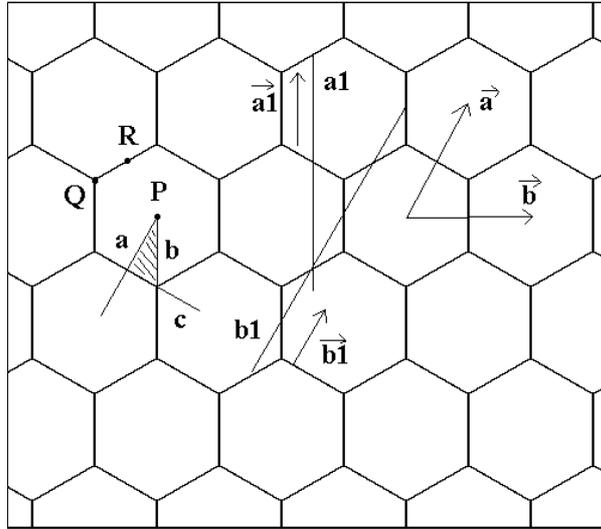
Nach dem letzten Abschnitt ist es keine so große Überraschung mehr, dass es nicht gar so viele mögliche Symmetriegruppen diskreter Muster gibt, da bereits die Drehwinkel und damit auch die Winkel zwischen Spiegelachsen so stark eingeschränkt sind. Wir werden

nicht beweisen, dass es nur 17 Gruppen für diskrete ebenenfüllende Muster gibt, sondern wollen uns stärker auf die Analyse der Beispiele nach dem mit dem vorletzten Abschnitt gegebenen Verfahren konzentrieren. Aber es soll doch wenigstens die Aussage, es gebe nur 17 Möglichkeiten, in ihrer genaueren Bedeutung geklärt und verstanden werden: Wenn zwei Achsen a und b parallel liegen, nicht aber zusammenfallen, dann ist die Spiegelung an a eine von der Spiegelung an b *verschiedene* Symmetrieoperation. Hat man nun weiter Spiegelungen an Achsen a_1 und b_1 , deren Abstand verschieden ist von dem zwischen a und b , so ist die von letzteren beiden Spiegelungen erzeugte Gruppe nicht dieselbe wie die von ersterem Paar erzeugte. Beide Gruppen enthalten verschiedene Elemente. Aber dennoch sind beide Gruppen im mathematischen Verständnis völlig gleich, nämlich isomorph. Das bedeutet: Man kann die Elemente der einen und der anderen Gruppe in umkehrbar eindeutiger Weise so zuordnen, dass auch die Hintereinanderschaltungsstruktur völlig übertragen wird. Anschaulich entspricht dem völlig, dass wir es auch nicht als andersartige Symmetrie empfinden, wenn etwa eine Sechseckpflasterung aus kleineren Sechsecken besteht als eine andere. Dagegen kann eine Symmetriegruppe, die eine Drehung α um 90 Grad enthält, nicht isomorph zu einer solchen sein, die keine Drehung um 90 Grad enthält; denn es gilt $\alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \alpha = id$, und eine zur ersteren isomorphe Gruppe muss daher auch ein Element β mit der Eigenschaft $\beta \circ \beta \circ \beta \circ \beta = id$ enthalten. (Das neutrale Element (bei uns immer dasselbe, id) der einen Gruppe muss in das der anderen überführt werden bei Gruppenisomorphismen.) Ebenso kann eine Gruppe, die eine Spiegelung enthält, nicht isomorph zu einer solchen ohne eine Spiegelung sein, usw. Man beachte auch, dass zwei Gruppen noch lange nicht isomorph sind, wenn sie die gleiche endliche kleinstmögliche Erzeugendenzahl haben: Für jedes regelmäßige n -Eck kommt man mit zwei Spiegelungen (und nicht weniger) aus, aber die Symmetriegruppen sind alle verschieden (im strengen Sinne, d.h. nicht isomorph), da verschiedene Drehwinkel vorliegen und unterschiedliche Anzahlen von Drehwiederholungen benötigt werden, um auf id zu kommen. Mit ähnlichen Argumenten kann man ohne weiteres einsehen, dass die gleich vorzustellenden 17 Symmetriegruppen diskreter ebenenfüllender Muster alle wesentlich verschieden sind.

Wir wollen zunächst zwei Beispiele analysieren, um geeignete Arbeitsweisen vorzustellen, die zu einem umfassenden Verstehen des Symmetrieaspekts führen. Zweckmäßig geht man in zwei Schritten vor:

1. Beobachtung vorhandener Symmetrien der Grundtypen Translation, Drehung, Spiegelung und Gleitspiegelung, Aufzählen eines geeignet vollständigen Satzes von Symmetrien zu jedem vertretenen Typus
2. Bestimmen eines Fundamentalgebietes und Erzeugen des gesamten Musters daraus durch Anwendung möglichst weniger der im ersten Schritt beobachteten Symmetrien.

Erstes Beispiel:



1. Aufgezählte wesentliche Symmetrien (das Wesentliche zu jedem Typus):

- Translationen mit Vektoren \vec{a} und \vec{b} (man sollte keine längeren nennen, und nicht mehr)
- Drehungen um P , Q und R , jeweils mit den (kleinstmöglichen) Winkeln 60, 120 und 180 Grad. - Vergleichbare Drehpunkte wiederholen sich alle unendlich oft, aber diese drei Drehungen sind wesentlich verschieden.
- Spiegelungen an Achsen a , b und c . (Weniger erfasst nicht die vorhandene Spiegelsymmetrie, mehr ist überflüssige Wiederholung.)
- Gleitspiegelungen an Achsen a_1 mit Translationsvektor \vec{a}_1 und b_1 mit Translationsvektor \vec{b}_1 . (Nur diese beiden sind wesentlich verschieden. Angesichts der genannten Drehungen und Translationen braucht man nicht mehr zu nennen.)

2. Ein Fundamentalgebiet ist leicht zu finden: Man sucht zweckmäßig eines innerhalb eines Sechsecks, das man jedenfalls mittels der genannten Symmetrien vervielfältigen kann. Die Spiegelachsen ergeben sofort die Zerteilung in Dreiecke mit den Winkeln 30, 60 und 90 Grad. Ein solches bildet ein Fundamentalgebiet (schraffiert). Nunmehr beobachtet man (dies sollte selbständig konkret ausgeführt werden), dass man mit folgenden Sätzen von Erzeugenden *jeweils* auskommt, um das ganze Muster aus einem solchen Fundamentalgebiet wiederherzustellen:

- Die drei Spiegelungen an a , b , c bilden ein kleinstmögliches Erzeugendensystem der Symmetriegruppe.
- Die beiden Spiegelungen an a , b zusammen mit der Gleitspiegelung an a_1 mit Vektor \vec{a}_1 bilden ebenso ein kleinstmögliches Erzeugendensystem.
- Die Spiegelung an a , Drehung um P um 60 Grad und die Gleitspiegelung an a_1 bilden wiederum ein solches.

Zweites Beispiel:



1. Beobachte Symmetrien zu jedem vorhandenen Typus:
 - Translationen mit \vec{a} und \vec{b}
 - Drehungen um P mit 90 Grad und um Q mit 180 Grad
 - Spiegelung an a (natürlich gibt es die entsprechende Spiegelachse auch senkrecht dazu durch Q)
 - Gleitspiegelung an c mit Vektor \vec{c} . (Auch d ist eine Gleitspiegelachse, allerdings weniger fundamental und einfacher zu sehen.)
2. Der graue halbe Parkettstein bildet ein Fundamentalgebiet, und folgende Sätze von Symmetrien bilden, wieder jeder für sich, jeweils ein kleinstmögliches Erzeugendensystem der vollen Symmetriegruppe:
 - Drehung um P mit 90 Grad und Spiegelung an a
 - Drehung um P mit 90 Grad und Gleitspiegelung an c
 - Spiegelung an a und Gleitspiegelung an c .

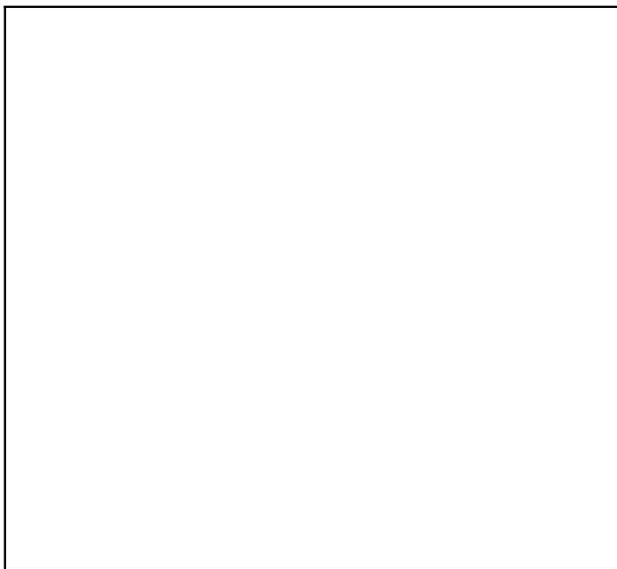
Man sollte beobachten, dass gilt: Gleitspiegelung an c \circ Spiegelung an a = Drehung um P mit 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn. Daraus ergibt sich sofort die Äquivalenz dieser Systeme. Führen wir hier einmal genauer aus, wie man das Ganze aus dem Fundamentalgebiet mittels des erstgenannten Erzeugendensystems wiederherstellen kann: Anwendung der Spiegelung ergibt einen ganzen Parkettstein, Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um P mit 90 Grad einen senkrechten, Spiegelung dann ein Parkettsteinpaar, Drehung drei mal ein großes Quadrat um P aus 8 Steinen, und nun wird abwechselnd gespiegelt und drei mal gedreht: Immer weitere Reihen von Doppelsteinquadraten um P entstehen, lückenlos die Ebene füllend.

Bemerkung: Wenn man ein Erzeugendensystem als solches erweisen möchte, so ist besonders darauf zu achten, dass man wirklich nur die aufgezählten Symmetrieeoperationen verwendet und nicht etwa analoge (im Sinne der Wiederholungen im Muster) wie Spiegelung an andern parallelen Achen usw. Denn es handelt sich dann um *verschiedene* Symmetrieeoperationen.

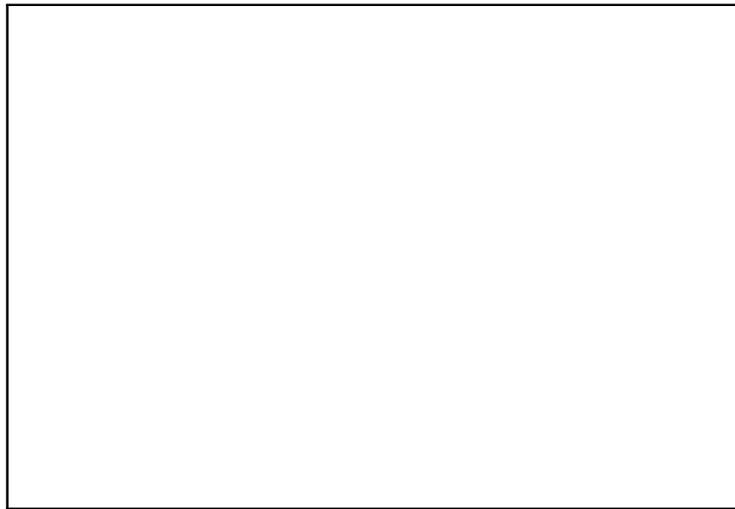
Wir kommen nunmehr zur Systematik *aller* Möglichkeiten für derartige Muster.

Die siebzehn kristallographischen Symmetriegruppen für diskrete Muster, welche die Ebene füllen, mit Beispielen, möglichem Fundamentalgebiet und je einem kleinstmöglichen (und wegen seiner Endlichkeit daher auch minimalen) Satz von Erzeugenden:

Gruppe 1, erzeugt von zwei Translationen:



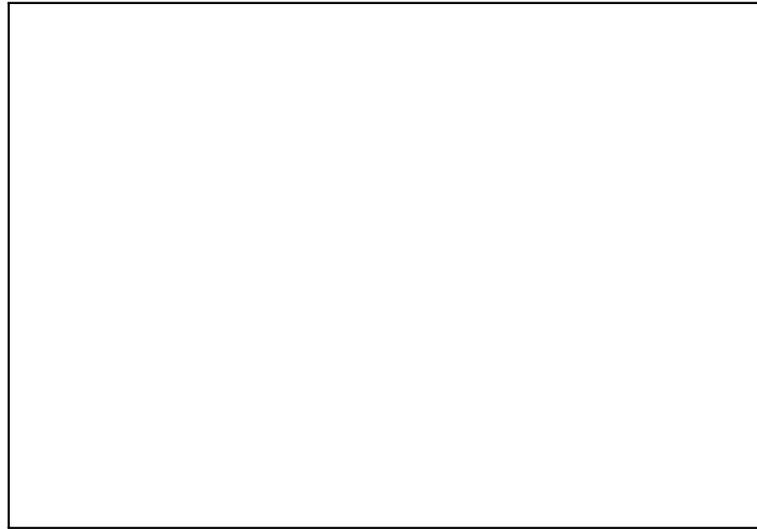
Gruppe 2, von drei Drehungen (um verschiedene Punkte natürlich) mit 180 Grad erzeugt:



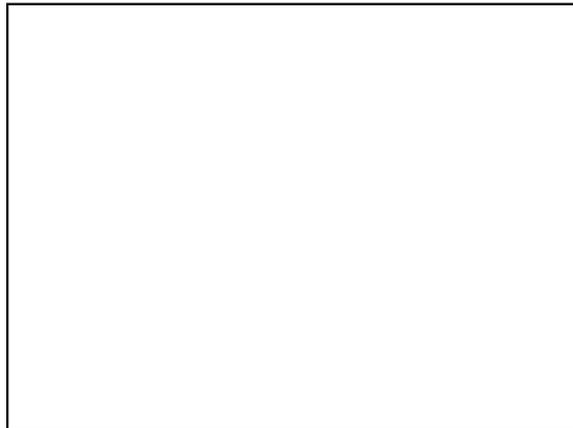
Gruppe 3, erzeugt von zwei Spiegelungen an parallelen Achsen und einer Translation parallel zu diesen Achsen:



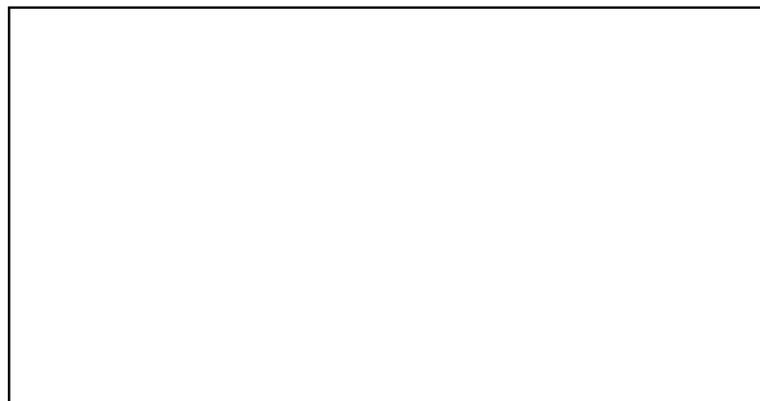
Gruppe 4, von zwei parallelen Gleitspiegelungen erzeugt:



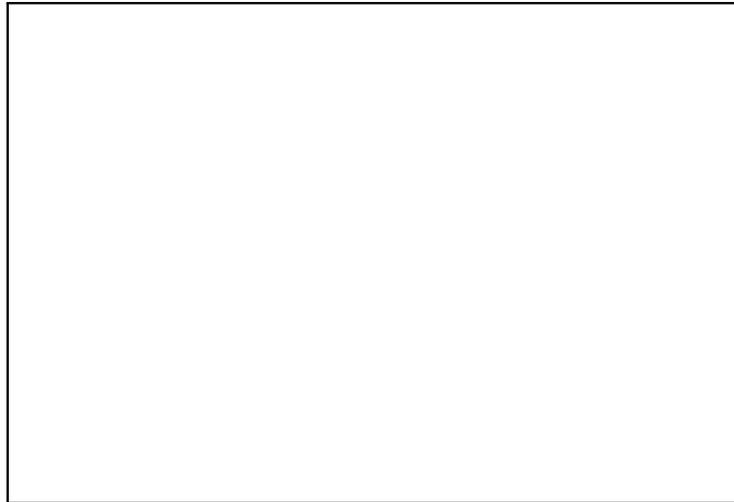
Gruppe 5, von einer Spiegelung und einer parallelen Gleitspiegelung erzeugt:



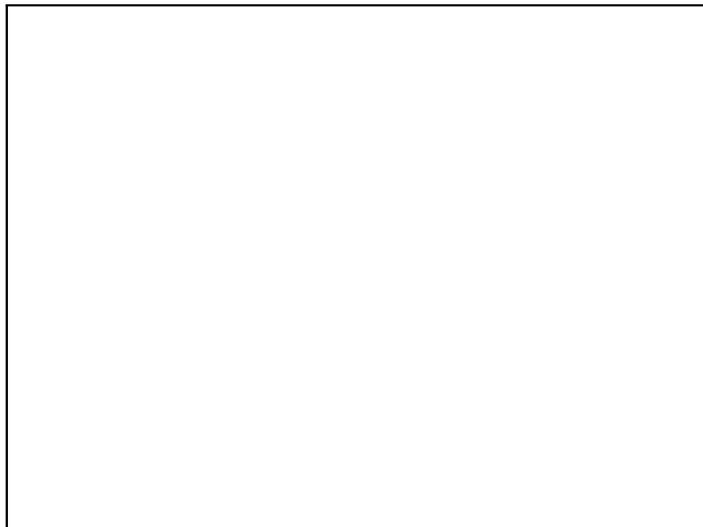
Gruppe 6, erzeugt von den Spiegelungen an den vier Seiten eines Rechtecks, das kein Quadrat ist:



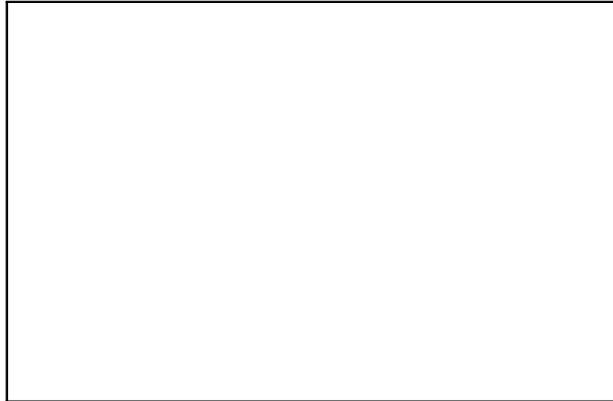
Gruppe 7, erzeugt von einer Spiegelung und zwei Drehungen (um verschiedene Punkte)
mit 180 Grad:



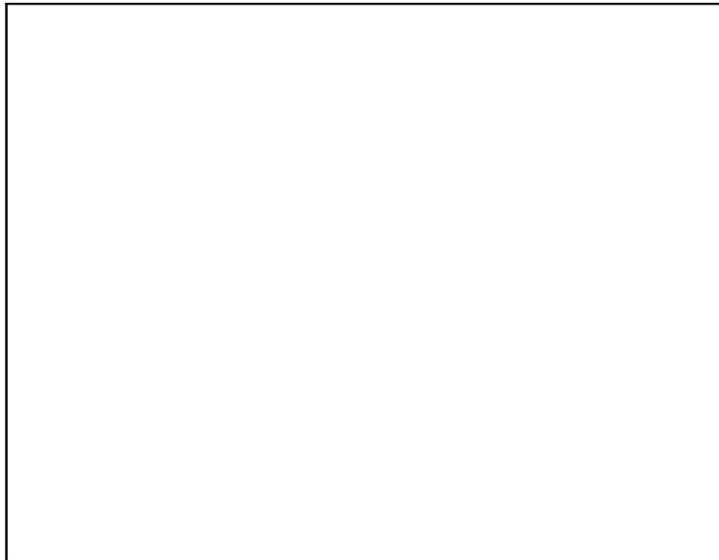
Gruppe 8, erzeugt von zwei Gleitspiegelungen mit senkrecht aufeinanderstehenden
Achsen:



Gruppe 9, erzeugt von zwei Spiegelungen an senkrechten Achsen und einer Drehung um 180 Grad



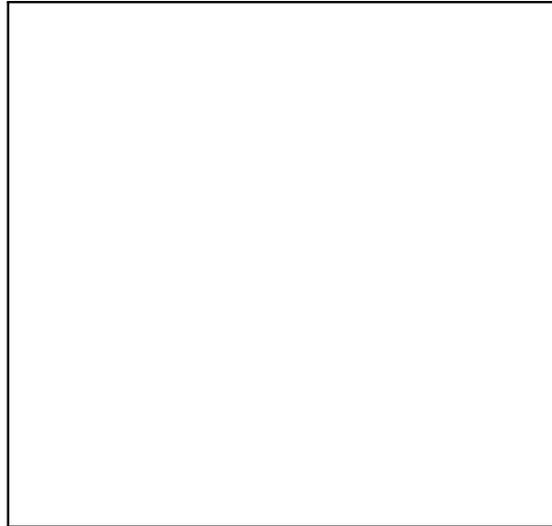
Gruppe 10, erzeugt von einer Drehung um 90 Grad und einer Drehung um 180 Grad:



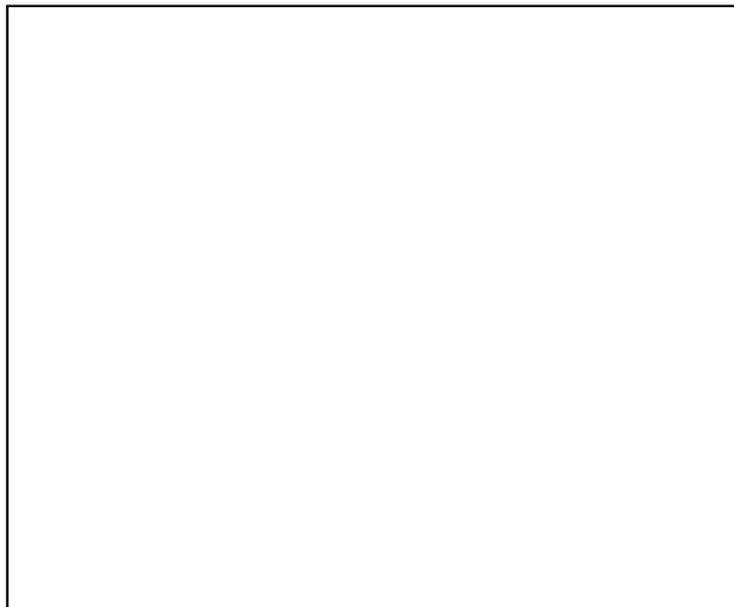
Gruppe 11, erzeugt von den Spiegelungen an den drei Seiten eines Dreiecks mit den Winkeln 45,45,90 Grad:



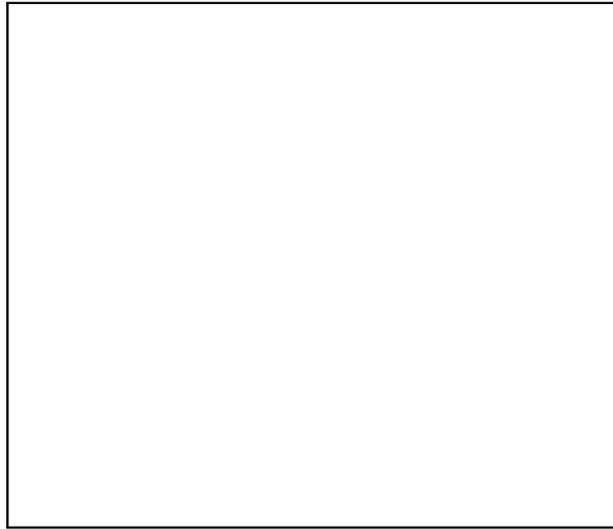
Gruppe 12, erzeugt von einer Spiegelung und einer Drehung um 90 Grad (Drehpunkt nicht auf der Spiegelachse) - das zweite der ausführlich besprochenen Beispiele:



Gruppe 13, erzeugt von zwei Drehungen um 120 Grad:



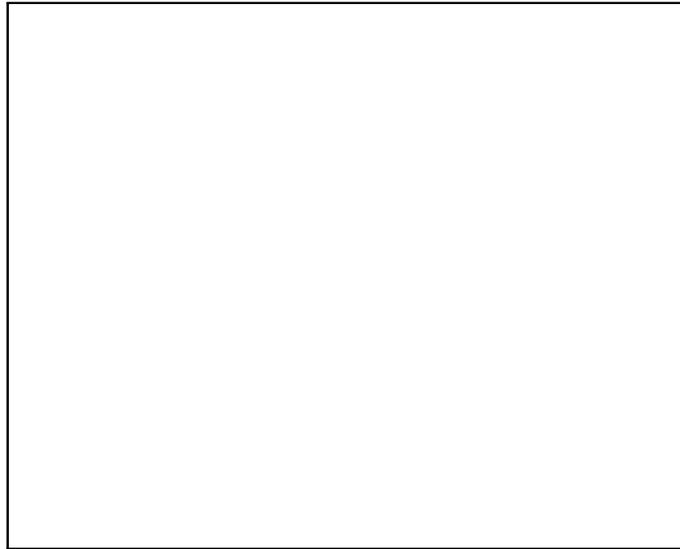
Gruppe 14, erzeugt von einer Spiegelung und einer Drehung um 120 Grad:



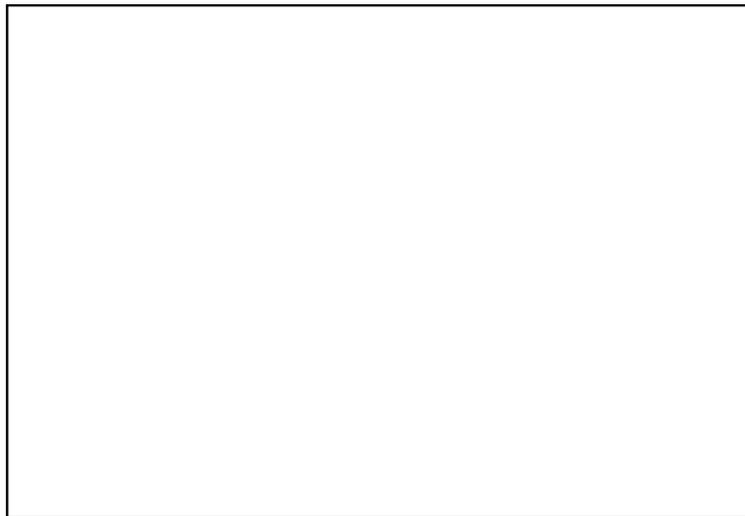
Gruppe 15, erzeugt von den Spiegelungen an den drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks:



Gruppe 16, erzeugt von einer Drehung um 120 Grad und einer um 180 Grad:

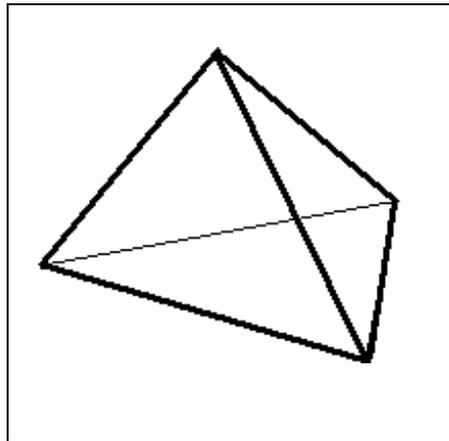


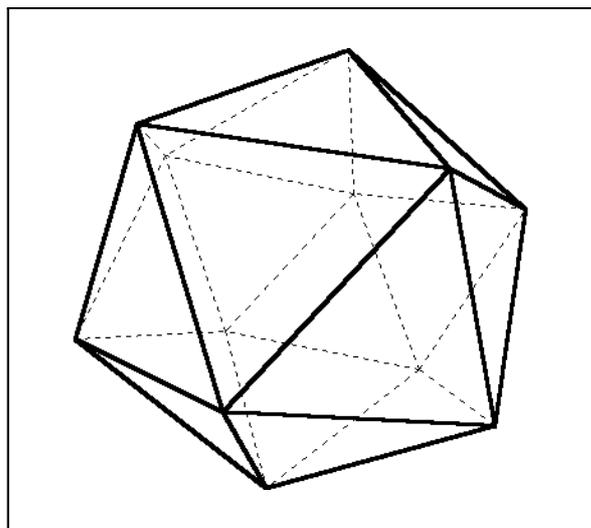
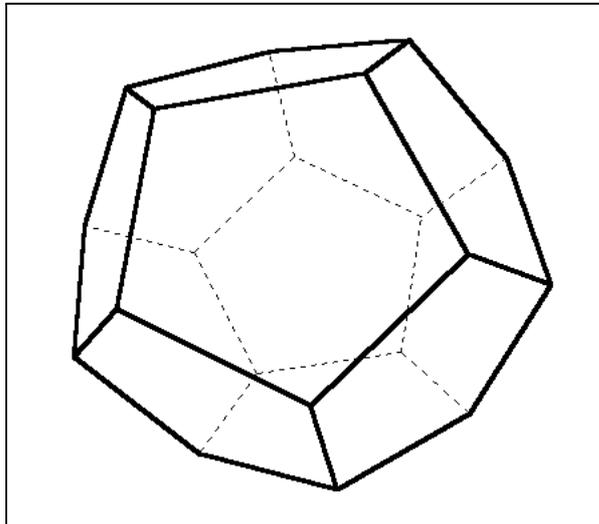
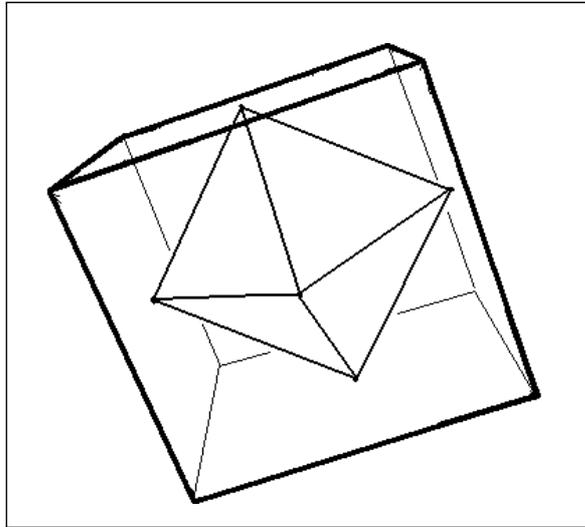
Gruppe 17, erzeugt von den Spiegelungen an den drei Seiten eines Dreiecks mit den Winkeln 30,60,90 Grad - das erste der ausführlich besprochenen Beispiele:

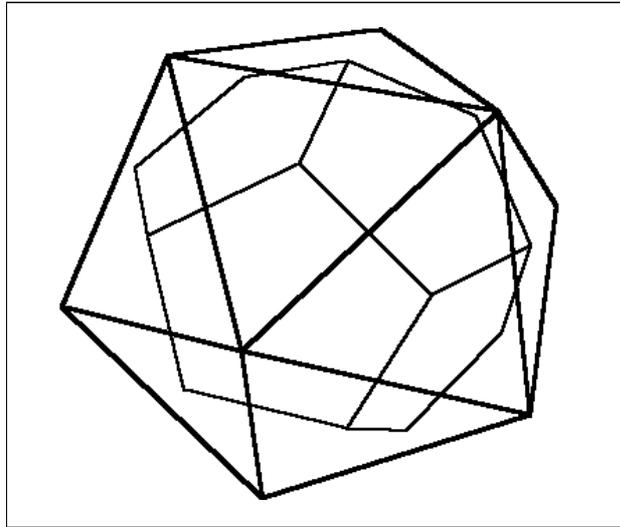


3.9 Die vollkommene Symmetrie der vollkommenen Körper

Bereits in der Antike kam man zur Betrachtung vollkommener (dreidimensionaler) Körper: Ein Würfel ist irgendwie „vollkommen“ - was bedeutet das genauer? Es ist die vollkommene Symmetrie, das maximal erreichbare Gleichmaß, wenn man vorgibt, dass jede begrenzende Seite ein Quadrat sein soll. Zur Eckenzahl 4 hat das Quadrat maximale Symmetrie. Auch jede Ecke sieht gleich aus: Dieselbe Anzahl von Kanten, drehsymmetrisch angeordnet. Diese Eigenschaften - alle Seitenflächen sind kongruente gleichseitige Vielecke, und an jeder Ecke stoßen gleich viele Kanten in immer denselben Winkeln zusammen - definieren den Begriff des vollkommenen Körpers. Offen bleiben dabei die Anzahl der Seitenflächen, der Kanten und der Ecken. Tatsächlich erkennt man schnell, dass es weitere Möglichkeiten gibt: Der Tetraeder hat 4 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen - daher der Name, 6 Kanten und 4 Ecken. Der Oktaeder hat 8 gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen, 12 Kanten und 6 Ecken. Dazu kommen zwei schwierigere, die man nicht so leicht sieht: Dodekaeder (12 Seiten aus gleichseitigen Fünfecken, 30 Kanten und 20 Ecken) und Ikosaeder (20 Seiten aus gleichseitigen Dreiecken, 30 Kanten und 12 Ecken). Folgende Abbildungen zeigen die fünf vollkommenen Körper: Tetraeder, Würfel mit einbeschriebenem Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, schließlich Ikosaeder mit einbeschriebenem Dodekaeder.







Zu diesen Körpern sind zwei wunderschöne Überlegungen anzustellen, je von einem auch sonst in der Mathematik wichtigen Typus:

- **Dualität:** Jeder vollkommene Körper hat einen „Zwilling“, den sogenannten dazu dualen Körper: Man verbinde die Seitenmitten des ersteren (als Ecken) durch Kanten miteinander. Der duale Körper hat offenbar gerade die Seitenzahl des ersten als Eckenzahl, die Eckenzahl des ersten als Seitenzahl, und er hat dieselbe Kantenzahl. Der Tetraeder ist offenbar zu sich selbst dual, Würfel und Oktaeder sind dual zueinander, ebenso Dodekaeder und Ikosaeder. Führt man die Dualisierung zwei mal hintereinander durch, so gelangt man wieder zum Ausgangspunkt. Wir fassen das übersichtlich noch einmal in einer Tabelle zusammen:

Körper	dualer Körper	Seiten(flächen)zahl	Eckenzahl	Kantenzahl
Tetraeder	Tetraeder	4	4	6
Würfel	Oktaeder	6	8	12
Oktaeder	Würfel	8	6	12
Dodekaeder	Ikosaeder	12	20	30
Ikosaeder	Dodekaeder	20	12	30

(Wir werden der Idee der Dualität auch in der projektiven Geometrie wieder begegnen.)

- **Eulercharakteristik:** Betrachten wir die Anzahlen in der Tabelle, so fällt auf, dass stets gilt: Seitenzahl + Eckenzahl – Kantenzahl = 2. Das ist alles andere als ein Zufall, es handelt sich um eine tief liegende Invariante, die Eulercharakteristik (der Oberfläche): Zeichnen wir auf irgendeinen Körper *ohne Löcher* im dreidimensionalen Raum (z.B. auch eine Kugel) irgendeine Landkarte mit vieleckigen (auch völlig unregelmäßigen) Gebieten - die Grenzkanten dürfen durchaus krumm sein, so gilt *stets* diese Beziehung. Allerdings muss man ein wenig präzisieren: Die Ländergrenzen dürfen keine unnötigen Ecken enthalten, von denen nicht mindestens drei

Grenzkanten ausgehen. Ferner dürfen keine unnötigen Kanten vorhanden sein, deren Wegfallen nicht die Zahl der Länder vermindern würde. (Damit schließen wir aus, in ein „Land“ ein „Inselland“ einzubauen, etwa mit 5 Ecken und 5 Kanten, während die Zahl der Länder um 1 erhöht würde.) Schließlich sollte jede Kante von zwei Ecken begrenzt sein. (Sonst könnte man die Kugeloberfläche durch einen Großkreis in zwei Hemisphären einteilen und hätte 2 Seitenflächen und eine Grenzkante, keine Ecke. Es käme 1 statt 2 bei $S + E - K$ heraus.) Nunmehr können wir uns klarmachen, dass die Eulercharakteristik - das ist die Zahl $S + E - K$ - stets das gleiche Resultat zeigt. Wir gehen dazu induktiv vor (wieder eine wichtige Idee): Ausgehend von einer Landkarte mit beliebig vielen Ländern, Ecken und Kanten bauen wir ab. Wir reduzieren die Zahl der Länder durch Fortlassen einer Kante um 1 und finden dabei folgende Möglichkeiten: Erster Fall: Die beiden Eckpunkte der Kante bleiben solche. Dann haben wir lediglich die Zahl der Länder und die der Kanten je um 1 reduziert, die Eulerzahl ist also gleich geblieben. Zweiter Fall: Eine Ecke hört auf, eine solche zu sein, weil dort nur noch zwei Länder aneinanderstoßen. Dann reduziert sich die Zahl der Ecken um 1, ebenso aber die Zahl der Kanten. Zusätzlich haben wir natürlich den Effekt vom ersten Fall, dass sich mit der ursprünglich fortgelassenen Kante auch die Länderzahl um je 1 verminderte. Wieder bleibt insgesamt die Eulerzahl dieselbe. (Dieselbe Überlegung gilt für den Fall, dass dies Phänomen bei beiden Eckpunkten unserer eliminierten Kante angetroffen wird: Ecken- und Kantenzahl werden dann jeweils um 2 reduziert.) So kommt nun die induktive Überlegung zum Ziel: Sie führt das Problem auf (im Sinne unserer Präzisierung zulässige) Landkarten mit minimaler Länderzahl zurück. Für diese können wir aber leicht das Resultat 2 für die Eulerzahl ablesen. Fordern wir etwa mindestens dreieckige Länder, so kommen wir auf 4 Länder und 6 Kanten zurück, die hier anders als beim Tetraeder natürlich beliebig unregelmäßig sein dürfen.

Die Eulerzahl wird uns gute Dienste leisten für das natürlich zu stellende Problem: Haben wir mit unserer Tabelle *alle* vollkommenen Körper erfasst? (Wieder derselbe Typus wie bei der Beschreibung *aller* möglichen Symmetrien.) Wir werden nämlich sehen, dass bereits die Eulerzahl 2 andere Seiten- Ecken- und Kantenzahlen verbietet. Damit haben wir ein viel stärkeres

Resultat: *Auch unregelmäßige* Körper, deren Grenzflächen Polygone immer derselben Eckenzahl sind und an deren Ecken immer dieselbe Anzahl von Kanten ausgeht, sind *nur* mit den tabellierten Anzahlen möglich. Insbesondere sind mit der Tabelle alle vollkommenen Körper des dreidimensionalen Raums erfasst.

Zum Beweis: Seien S , E und K die in die Eulerzahl eingehenden Seiten eines Körpers der im Satz vorausgesetzten Form. Wir wissen dann: $S + E - K = 2$. Sei n die immer gleiche Anzahl der Ecken (und Kanten zugleich) einer Grenzfläche, und sei k die immer gleiche Anzahl der Kanten, die von einer Ecke ausgehen. Wir haben folgende Beziehungen: An jeder Ecke sitzen k Kanten, an jeder Kante 2 Ecken, also

$kE = 2K$. Analog haben wir an jeder Seitenfläche n Kanten, währende zu jeder Kante 2 Seitenflächen gehören, daher $nS = 2K$. Nun folgt aus

$$S + E - K = 2,$$

wenn wir mittels der beiden erwähnten Beziehungen einsetzen:

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{n}K, \\ E &= \frac{2}{k}K, \end{aligned}$$

die Gleichung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right)K &= 1. \text{ Daraus folgt } (K > 0): \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} &> 0. \end{aligned}$$

Nun sind jedenfalls $k, n \geq 3$, und $1/2 = 1/3 + 1/6$. Daher folgen die nachstehenden Aussagen (k und n sind ganze Zahlen):

$$\begin{aligned} k, n &\leq 5. \text{ Mit } \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2} > 0 \text{ also:} \\ \text{Wenn } k &= 5, \text{ so } n = 3. \\ \text{Wenn } k &= 4, \text{ so } n = 3. \\ \text{Wenn } k &= 3, \text{ so } n = 3 \text{ oder } n = 4 \text{ oder } n = 5. \end{aligned}$$

Gerade diese Möglichkeiten sind mit unseren fünf bekannten vollkommenen Körpern realisiert:

Körper	k	n
Tetraeder	3	3
Würfel	3	4
Oktaeder	4	3
Dodekaeder	3	5
Ikosaeder	5	3

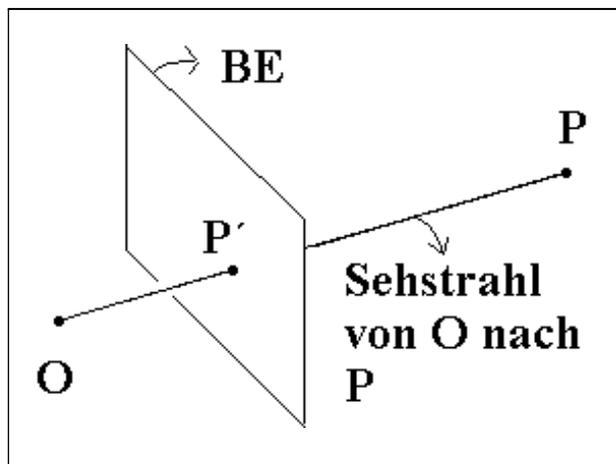
Die Zahlen S , E und K ergeben sich eindeutig aus den Zahlen k und n mittels der obenstehenden Formeln, wie in der ersten Tabelle angegeben. Da es offensichtlich nur eine einzige Möglichkeit gibt, eine Kugeloberfläche mit einem Netz von Punkten immer gleicher Abstände mit vorgelegten Zahlen k, n zu versehen, gibt es also nur diese fünf vollkommenen Körper. Wir haben aber weiter noch bewiesen, dass es auch keine unregelmäßigen Netze mit anderen charakterisierenden Zahlen k, n als denen der Tabelle geben kann. Versucht man es insbesondere mit Sechsecken, so muss man immer etwas Fünfeckiges z.B. mit einschmuggeln.

4 Zentralperspektive

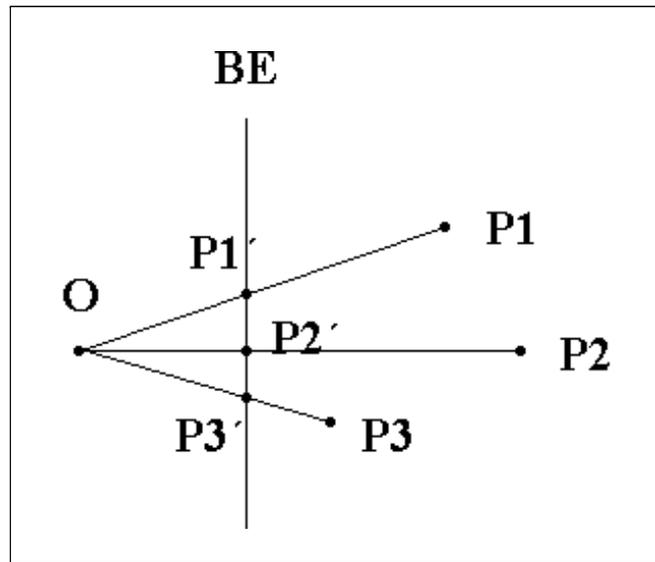
Eine Errungenschaft der italienischen Renaissance im frühen 15. Jahrhundert war die Zentralperspektive, die es ermöglichte, dreidimensionale Gegenstände so auf die zwei Dimensionen einer Wand oder Leinwand abzubilden, dass der Eindruck des natürlichen Sehens entstand. Von Anbeginn wurde die Sache rational durchdrungen, und das hieß sofort: mathematisch verstanden - Leute wie Alberti waren recht universell, Architekt, Maler und - Mathematiker, später auch noch Sprachgelehrter. Allerdings entstand erst im 19. Jahrhundert das systematische Verständnis im Rahmen der projektiven Geometrie. Wir werden so vorgehen, dass wir einfache Grundlagen besprechen, aus denen sich die wesentlichen elementar benötigten Konstruktionen herleiten lassen, dazu aber auch die vereinheitlichende begriffliche Kraft der projektiven Geometrie abrundend heranziehen.

4.1 Das Abbildungsprinzip

Das Prinzip leitet sich vom einäugigen Sehen her: Mit dem Bild auf einer Bildebene soll für den darauf schauenden Betrachter derselbe Eindruck entstehen wie von der dahinter liegenden Wirklichkeit; das bedeutet: Ein Punkt P der Wirklichkeit wird durch einen geraden „Sehstrahl“ mit dem Augpunkt O (Idealisierung des Auges) verbunden und auf den Schnittpunkt P' dieses Sehstrahls mit der Bildebene abgebildet, vgl. die folgende Skizze. Wir setzen stets voraus, dass der Augpunkt O nicht auf der Bildebene BE liegt.



Denselben Sachverhalt werden wir für gewisse Zwecke auch einfacher veranschaulichen, indem wir diese Konfiguration von oben ansehen. Das sieht dann so aus:



Man sollte beachten, dass derlei Skizzen die Konfiguration Wirklichkeit - Betrachter - Bild darstellen. Wir werden sie für theoretische Begründungszwecke öfter heranziehen. Von ihnen zu unterscheiden sind die Zentralbilder auf der Bildebene selbst, die unsere Zeichenebene ist. Schließlich werden wir in der Bildebene durchzuführende zeichnerische Konstruktionen kennenlernen, die dann natürlich beim Arbeiten oder zur Erläuterung ebenfalls in der Bildebene zu sehen sein werden.

Wie gezeigt werden alle (für praktische Zwecke nur die nicht verdeckten) Punkte der Wirklichkeit (für praktische Zwecke: nur die von der Bildebene in die Ferne - vom Betrachter aus gesehen - sich erstreckende) auf die Bildebene - das ist die Zeichenebene - projiziert, wobei man sich für praktische Zwecke natürlich auf eine real begrenzte Bildebene beschränken muss. Das Abbildungsprinzip benutzt die räumlichen Verhältnisse und ist direkt mühsam anzuwenden - von Dürer gibt es beispielsweise eine Darstellung eines entsprechenden Apparates. Daher ist es die Hauptaufgabe der nachfolgenden Konstruktionen, das Prinzip in einfache Operationen umzumünzen, die allein im Rahmen der zweidimensionalen Bildebene recht bequem ausgeführt werden können. Neben zeichnerischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal werden wir auch eine rechnerische Lösung des gesamten Problems angeben, mit der man in der Lage ist, über einfache Computerprogramme sehr komplizierte (mathematisch analytisch beschriebene) Gebilde im Rahmen der Bildauflösung genau zentralperspektivisch abzubilden, wobei alle erdenklichen Parameter wie Ansicht, Entfernung usw. frei eingestellt werden können. Die zeichnerischen Konstruktionen (auch die rechnerische ohne Computernutzung) dagegen wird man für einige besonders wichtige Punkte benutzen, dann frei den unproblematischeren Rest ergänzen.

Wie man weiß, entsteht mancher Effekt der räumlichen Wahrnehmung gerade durch das Sehen mit zwei Augen. Das kann man auch realisieren, doch nur mit technischem Aufwand und ungünstigen Nebeneffekten. Glücklicherweise wird jedoch das räumliche Sehen und Interpretieren eines Bildes bereits glänzend unterstützt von der auf dem einäugigen Sehen basierenden Konstruktion der Zentralperspektive. Die Grundphänomene

sind geläufig: Das Zusammenlaufen der Bilder paralleler Geraden mit wachsender Entfernung vom Betrachter in Tiefenrichtung, die unterschiedliche Stärke dieses Effekts je nach Entfernung der Gegenstände, die Verkürzung von in Wirklichkeit gleichen Abständen in Tiefenrichtung, die unterschiedliche Verzerrung des gleichen Winkels je nach Entfernung oder Lage. Im übernächsten Abschnitt wollen wir genau diese Grundphänomene erklären und die Basis aller Konstruktionen bereitstellen: die Konstruktion von Fluchtpunkten und Fluchtgeraden.

Zuvor wollen wir jedoch ein wenig reflektieren, welche grundlegenden Eigenschaften die Zentralprojektion als Abbildung hat, im Vergleich zu den Symmetrioperationen, die wir im ersten Teil kennenlernten.

4.2 Die Erhaltungseigenschaften der Zentralprojektion

Die Symmetrioperationen zeichnen sich dadurch aus, dass sie Längen und Winkel erhalten, alles im gleichen Maß belassen. Insbesondere machen sie aus Gegenständen einer gewissen Dimension stets solche derselben Dimension. Grundlegend anders die Zentralprojektion (auch die Parallelprojektion): Ihr Sinn besteht gerade darin, eine Dimension zu verlieren. Allein daraus lässt sich mathematisch folgern, dass Längen und Winkel überhaupt nicht erhalten werden *können* (Konkretes dazu im nächsten Abschnitt). Aber dennoch bleibt einiges erhalten, das man genau beschreiben kann (nennen wir dazu eine beliebige Zentralprojektion π):

- **Inzidenz:** Die Erhaltung der Inzidenz, d.h. der Beziehung „liegen auf“, lohnt sich hier durchaus zu nennen, da sie in vielerlei Situationen konkret anzuwenden ist. Sie beruht allein auf der Abbildungseigenschaft, der Eindeutigkeit des Bildpunktes zu jedem Punkt des Ausgangsraums. Liegt ein Punkt P auf dem Gebilde F , also $P \in F$, so liegt auch $P' = \pi(P)$ auf $\pi(F)$, das ist die Menge aller Bildpunkte der Punkte aus F , also $\pi(F) = \{\pi(Q) \mid Q \in F\}$. Denn P' ist einer der Bildpunkte von Punkten aus F . Diese unglaublich triviale Feststellung hat praktisch wichtige Konsequenzen: Vielerlei wichtige Punkte, um deren Bildpunkte es gehen wird, sind charakterisiert als Schnittpunkte zweier Geraden, z.B. der Mittelpunkt M eines Rechtecks als Schnittpunkt der Diagonalen. Dann wissen wir, dass der Bildpunkt M' auch korrekt als Schnittpunkt zwischen den Bildern der Diagonalen konstruiert werden kann, d.h. der Verbindungen entsprechender Ecken im unregelmäßigen Viereck, welches im allgemeinen das Bild jenes Rechteckes ist und das wir hier als nicht zu einer Strecke degeneriert voraussetzen - hier benutzen wir bereits die nächste Erhaltungseigenschaft. Nennen wir die Diagonalen D_1, D_2 , so haben wir $M \in D_1$ und $M \in D_2$, also ist M' der Schnittpunkt der Bilder der Diagonalen. Hier ist die typische Struktur der Erhaltungseigenschaften zu beachten, die stets eine Vertauschbarkeit bedeuten, im Beispiel: Schneiden wir die Diagonalen zuerst und bilden dann das Resultat, den Schnittpunkt ab, so kommt dasselbe heraus wie bei umgekehrtem Vorgehen, zuerst die Diagonalen abbilden und dann schneiden.

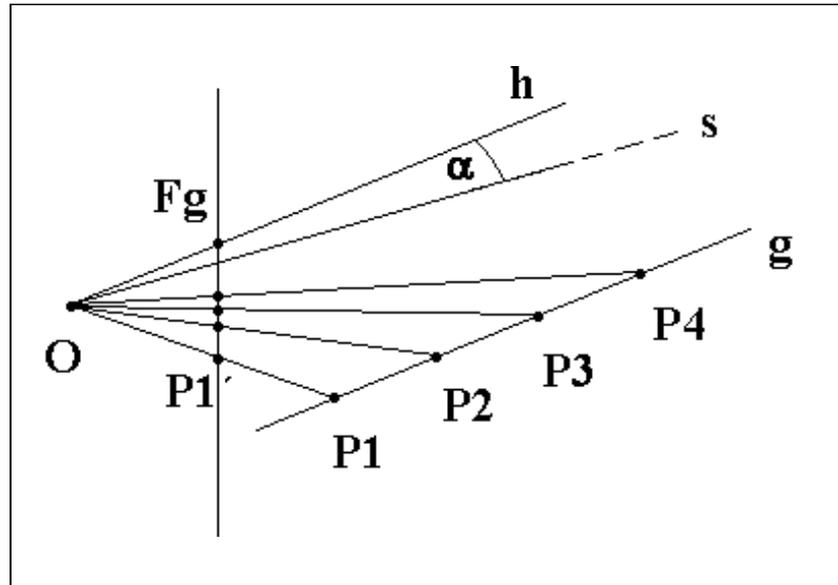
- **Geraden, die Bildpunkte auf der Bildebene besitzen und nicht zu Punkten degenerieren, werden als Geraden bzw. Halbgeraden abgebildet, und die Beziehung „zwischen“ bleibt erhalten:** Diese Erhaltungseigenschaft versteht sich erst unter Benutzung des Abbildungsprinzips der Zentralperspektive - topologische (nur nachbarschaftserhaltende) Abbildungen können selbstverständlich Gerades in Krummliniges deformieren. Betrachten wir die Sehstrahlen, die zu den verschiedenen Geradenpunkten gehen. Fallen sie nicht alle zusammen, weil die Gerade selbst ein Sehstrahl ist, so bilden diese Sehstrahlen zusammen eine Ebene, und der Schnitt dieser Ebene mit der Bildebene ist eine Gerade, da nach Voraussetzung dieser Schnitt nicht leer ist. Die Erhaltung der Beziehung „zwischen“ versteht sich ebenfalls unmittelbar aus dieser Anschauung der Sehstrahlen.
- **Das Doppelverhältnis bleibt erhalten:** Diese Eigenschaft liegt tiefer, und wir wollen sie nur erwähnen. Sie ist das Beste, was man in Abwesenheit der Längenerhaltung gerade noch behaupten kann, und sie gehört in die projektive Geometrie: Liegen vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis dieser vier Punkte (in dieser Reihenfolge!) definiert durch:

$$d(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}. \text{ Dabei ist } \frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} \text{ die Zahl } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit}$$

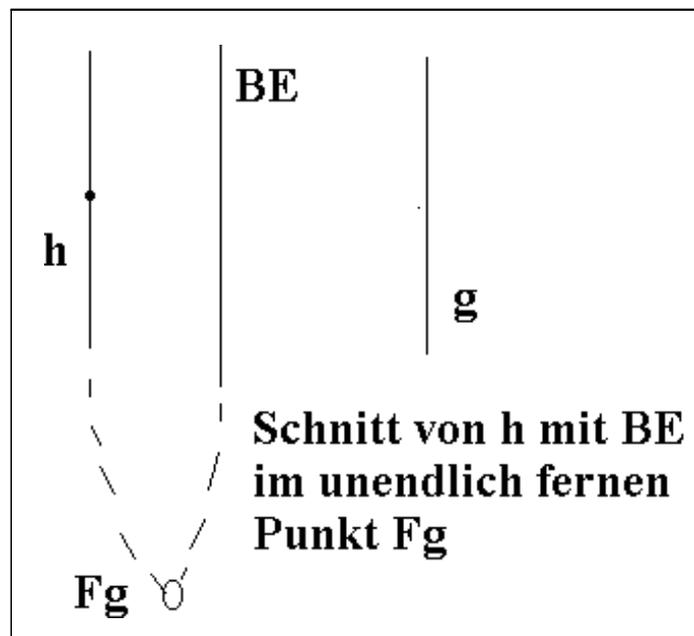
$$\lambda \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}, \text{ eindeutig bestimmt für } \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b} \text{ und } \overrightarrow{b} \neq \text{Nullvektor.}$$

4.3 Die Grundphänomene: Fluchtpunkte und Fluchtgeraden

Verfolgt man auf einer in die Ferne entschwindenden Geraden Punkte gleicher Abstände, so beobachtet man im zentralperspektivischen Bilde, dass sich die Abstände der Bildpunkte verkürzen, mehr noch: Die Folge der Bildpunkte konvergiert gegen einen Punkt, und das ist der Fluchtpunkt der Geraden, der selber kein Bildpunkt eines Geradenpunktes mehr ist. Dies Phänomen veranschaulichen wir mit folgender Skizze, welche die Bildebene BE als Strich von oben zeigt:



Wir beobachten die Verkürzung bei den Abständen der Bildpunkte P'_1, \dots, P'_4 der äquidistanten Punkte P_1, \dots, P_4 . Jeder Sehstrahl s mit noch so kleinem Winkel α gegen h nach der skizzierten Seite gehört noch zu einem Geradenpunkt, h selbst führt gerade nicht mehr zu einem Geradenpunkt. Also finden wir offenbar den Fluchtpunkt von g auf der Bildebene, indem wir die Parallele h zu g durch O bilden und h mit BE schneiden. Eine Besonderheit tritt auf bei Geraden, die parallel zur Bildebene liegen, wie folgende Abbildung zeigt:



Die Parallele h zu g durch O schneidet BE nicht, wir finden keinen Fluchtpunkt im Endlichen. Hier kommt die projektive Geometrie zu Hilfe: In der projektiven Ebene

schneiden sich zwei verschiedene Geraden *stets* in genau einem Punkt; parallele Geraden, die nicht ganz zusammenfallen, erhalten einen „Schnittpunkt im Unendlichen“ - mathematisch realisiert man das einfach so: Die Bildebene BE wird zur projektiven Ebene erweitert, indem man zu den gewöhnlichen Punkten von BE *als neue Punkte* alle folgenden hinzufügt: Die *Geradenscharen paralleler Geraden von BE* (oder einfacher wählt man zu jeder Parallelschar eine durch einen fixierten Punkt gehende Gerade dieser Schar als Repräsentanten). Also für jede Gerade g einen neuen Punkt P_g , so dass $P_g = P_h$ genau dann gilt, wenn $g \parallel h$. Anschaulich stelle man sich das so vor: Zu beiden Seiten einer gewöhnlichen Geraden fügt man in unendlicher Ferne einen Punkt hinzu, identifiziert jedoch diese beiden. Parallele Geraden haben denselben unendlich fernen Punkt. Nun rechnet man im erweiterten Raum den Punkt P_g zur Geraden g hinzu. Weiter definiert man, dass alle unendlich fernen, d.h. die neuen „Punkte“ zusammen eine Gerade bilden, die man „die unendlich ferne Gerade“ nennt - man stelle sie sich als Kreis von unendlichem Radius außen um BE herum vor, denke aber an die Identifikation gegenüberliegender Punkte. Nun verifiziert man sofort: In der projektiv erweiterten Ebene haben zwei verschiedene Geraden *stets* genau einen Schnittpunkt: Jede Gerade g , die nicht die unendlich ferne ist, schneidet sich mit der unendlich fernen genau in P_g . Zwei verschiedene Geraden g und h , die beide nicht die unendlich ferne sind, schneiden sich für $g \not\parallel h$ im gewöhnlichen Schnittpunkt im Endlichen, für $g \parallel h$ dagegen genau im Punkt $P_g = P_h$. Nun führen wir die analoge Konstruktion auch im Dreidimensionalen aus (Erweiterung um eine unendlich ferne Ebene) und erhalten für unseren fraglichen Fall ($g \parallel BE$), dass die Parallele h zu g durch O die projektiv erweiterte Bildebene BE genau in P_g schneidet. Wir finden also unseren gesuchten Fluchtpunkt von $g \parallel BE$ in der projektiv erweiterten Bildebene.

Dies machen wir nun zur völlig allgemeinen mathematischen Definition des Fluchtpunktes einer *jeden* Geraden:

Definition 4 *Der Fluchtpunkt F_g einer Geraden g ist der Schnittpunkt der Parallelen h zu g , die durch O geht, mit der projektiv erweiterten Bildebene BE . (F_g liegt genau dann im Endlichen, wenn $g \not\parallel BE$. Für $g \parallel BE$ ist F_g einfach der unendlich ferne Punkt P_g der projektiv erweiterten Bildebene.) Unmittelbares Resultat der Definition: Für zwei beliebige Geraden g_1, g_2 gilt:*

$$g_1 \parallel g_2 \text{ genau dann, wenn } F_{g_1} = F_{g_2}.$$

Eine praktische Folgerung: Tiefengeraden - das sind Geraden senkrecht zu BE - haben den **Hauptpunkt** H zum Fluchtpunkt, den man erhält, wenn man von O ausgehend das Lot auf BE fällt.

Zu unserer Definition samt Resultat haben wir eine äußerst wichtige Verallgemeinerung auf Ebenen: Betrachten wir in der obenstehenden Skizze die Gerade g als von entsprechendem Winkel angeschaute (und daher zur Geraden *im Bilde* degenerierte) Ebene E , die man sich also senkrecht auf dem Blatt stehend vorstelle, so führt das Verfolgen der Punkte von E in die Ferne (in allen Richtungen auf E) auf eine Gerade, die sogenannte *Fluchtgerade von E* (man stelle sich diese an der Stelle F_g in besagter Skizze senkrecht auf dem Blatt stehend vor). Offenbar ist diese analog zu gewinnen, und so definieren wir:

Definition 5 Die Fluchtgerade g_E der Ebene E ist der Schnitt der Ebene $F \parallel E$, die durch O geht, mit BE . (Wieder sollte dies projektiv verstanden werden: Für $E \not\parallel BE$ liegt g_E im Endlichen, sonst gewinnen wir sie als eine unendlich ferne Gerade, und zwar genau als die unendlich ferne Gerade von BE , um die wir bereits BE projektiv erweitert haben.) Wieder haben wir ein analoges Resultat aus der Definition: Für zwei beliebige Ebenen E_1, E_2 gilt:

$$E_1 \parallel E_2 \text{ genau dann, wenn } g_{E_1} = g_{E_2}.$$

Es sei erläutert, dass die unendlich ferne Gerade von BE als Fluchtgerade g_E für $E \parallel BE$ wirklich folgt: Die unendlich fernen Punkte von BE sind dann genau dieselben wie die unendlich fernen Punkte von der Ebene $F \parallel E$, die durch O geht; denn zu jeder Geraden g auf BE gibt es die parallele h auf F , und $P_g = P_h$. Andererseits haben BE und F keine endlichen Punkte gemeinsam, da BE und F wegen $O \notin BE$ nicht zusammenfallen. Der Schnitt von F mit BE (beide projektiv erweitert!) ist demnach genau die unendlich ferne Gerade von BE .

Unmittelbare praktische Konsequenzen: Eine ideal relativ zum Betrachter gedachte Bodenebene hat ebenso wie alle dazu parallelen Ebenen den **Horizont** zur Fluchtgeraden - das ist die horizontale Gerade auf BE , die durch den Hauptpunkt H geht. Senkrecht auf einer solchen gedachten Bodenebene stehende Ebenen haben senkrecht auf dem Horizont stehende Fluchtgeraden.

Die Fluchtpunkte von Geraden auf einer Ebene E und die Fluchtgerade von E stehen in einem äußerst wichtigen Zusammenhang:

Resultat:

Die Fluchtpunkte aller Geraden g auf einer Ebene E bilden vereinigt die Fluchtgerade g_E .

Bevor wir dies zeigen, wollen wir auf wesentliche Anwendungen hinweisen: Kennt man bereits die Richtung des Bildes g' einer Geraden g und weiß dazu, dass g auf einer Ebene E liegt, deren Fluchtgerade g_E man bereits kennt, so braucht man nur g' mit g_E zu schneiden, um F_g , den Fluchtpunkt von g zu bestimmen. g_E wiederum verschafft man sich oft dadurch, dass man zwei Fluchtpunkte von auf E liegenden Geraden kennt, oder einen Fluchtpunkt und dazu die Richtung der Fluchtgeraden weiß (letzteres ist insbesondere bei senkrecht auf dem „Boden“ stehenden Ebenen der Fall). Ein konkretes Beispiel: Liegt eine Gerade auf der Bodenebene (oder einer dazu parallelen), so findet sich ihr Fluchtpunkt auf dem Horizont. Natürlich muss man für den Fall einer zur Bildebene parallelen Geraden den Fluchtpunkt im Unendlichen heranziehen, also auf der projektiv erweiterten Horizontlinie.

Wir beweisen das Resultat: Betrachten wir einen Fluchtpunkt F_g einer Geraden g , die auf E liegt. Die Parallele $h \parallel g$ durch O ist dann enthalten in der Ebene $F \parallel E$ durch O . Folglich sitzt der Schnittpunkt von h mit BE auch auf dem Schnitt von F mit BE . Also $F_g \in g_E$. Betrachten wir andererseits einen beliebigen Punkt $Q \in g_E$. g_E ist der

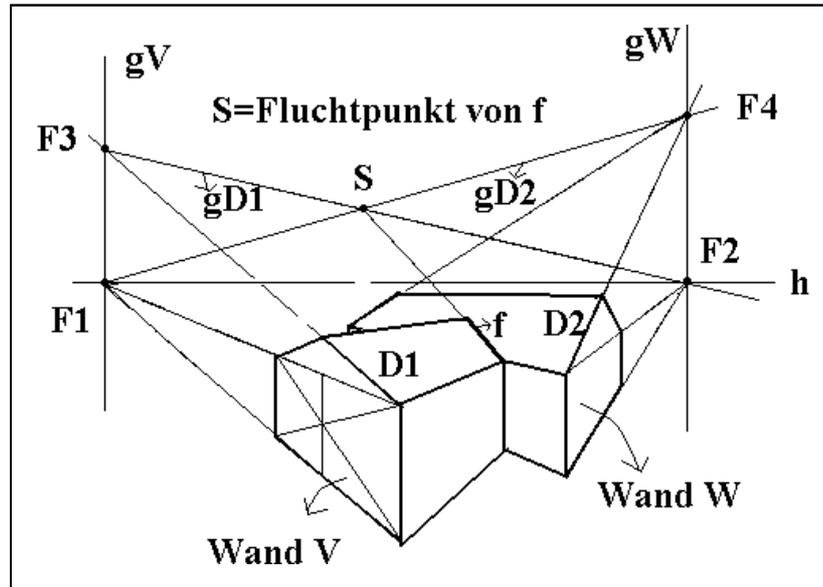
Schnitt von $F \parallel E$ durch O mit BE . Q ist jedenfalls verschieden von O , da $O \notin BE$. Daher gibt es genau eine Gerade h durch O und Q . Sie liegt auf F . Sei nun g irgendeine zu h parallele Gerade auf E - eine solche existiert selbstverständlich wegen $F \parallel E$. Dann gilt $Q = F_g$. Also haben wir zu Q eine Gerade auf E gefunden, deren Fluchtpunkt Q ist. Insgesamt gilt damit: $g_E =$ Menge aller Fluchtpunkte von Geraden auf E .

4.4 Ein Beispiel zur Anwendung aller grundlegenden Eigenschaften von Fluchtpunkten und Fluchtgeraden

Wir stellen uns folgende Aufgabe: Ein Haus (der üblichen primitiven „Hundehütten“-Form mit Giebelwand an der Schmalseite und First über der Mitte dieser Seite) steht auf dem ebenen Boden (zu dem die Bildebene senkrecht steht), es wird über Eck angeschaut. Senkrecht an dies Haus stößt ein weiteres, derart dass die Dächer ineinanderschneiden. Beide Dächer können verschiedene Höhen besitzen, die Hausoberkanten sind dagegen gleich hoch. Wir wollen nun nicht beschreiben, wie man von Anfang an der Reihe nach vorgeht. Stattdessen nennen wir lediglich, was gemäß Aufgabenstellung noch alles frei wählbar bleibt, lediglich mit einer gewissen Zweckmäßigkeit zu bestimmen: Die Längen und Höhen der Häuser, die Winkel, mit denen die Dachflächen ansteigen, die Lage des Auges relativ zum Objekt (Aughöhe, Rechts-Links-Versetzung und Winkel, in dem der senkrecht auf die BE fallende Blick zu den Hauswänden steht - es wurde lediglich vorgegeben, dass dieser Winkel kein rechter sein soll). In unserer Lösung wurden diese Parameter derart gewählt, dass das Auge oberhalb der Firste liegt (woran sieht man das?), dass man die Giebelwände noch sieht, dass schließlich die Dachflächen nicht allzu steil ansteigen. Zählen wir nun auf, was *nicht frei* wählbar ist, sondern zwingende Regeln einhalten muss:

- Linien, die in Wirklichkeit parallel sind und nicht parallel zur Bildebene liegen, müssen zum selben Fluchtpunkt laufen. Die Hauskanten unten und oben müssen (ebenso wie die Firste) Fluchtpunkte F_1 und F_2 auf dem Horizont haben (warum dort?), deren Lage darauf jedoch frei wählbar ist. (Später erst werden wir Betrachtungswinkel genau vorgeben und konstruieren können.)
- Die vertikalen Hauskanten erscheinen auch im Bilde als vertikal und parallel (warum?).
- Die Giebelmitten sind für die Lagen der Firste zu konstruieren, nach Vorgabe der Hauskörper-Quader. Die folgende Abbildung zeigt, wie das unter Benutzung der Inzidenzerhaltung zu machen ist.
- Der Witz der ganzen Aufgabe ist natürlich die Konstruktion der Falzkante f , in der sich die sichtbaren Dachflächen schneiden. Ihre Richtung auf den Fluchtpunkt F_f ist eindeutig konstruierbar, sobald die Fluchtpunkte F_1, F_2 sowie die Giebelwände V und W und die Lage der zugehörigen Hausecke, an der beide Teile aufeinandertreffen, vorgegeben sind. Die folgende Skizze zeigt, welche Elemente man dazu aufbaut: Zunächst bestimmt man die Fluchtgeraden g_V und g_W der Giebelwände, dann die Fluchtgeraden g_{D_1}, g_{D_2} der Dachflächen D_1, D_2 , schließlich den Fluchtpunkt F_f der

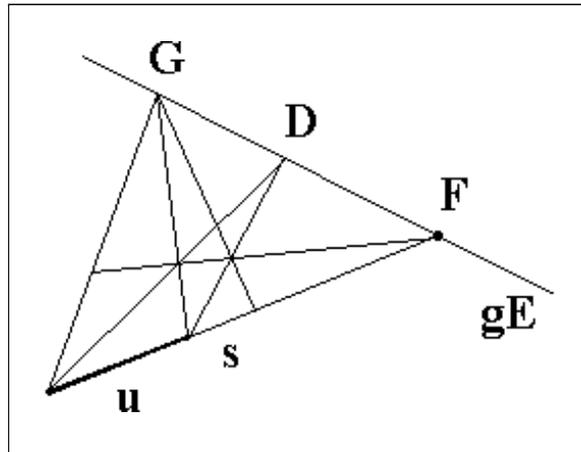
Schnittgeraden von D_1, D_2 als Schnittpunkt S von deren Fluchtgeraden g_{D_1}, g_{D_2} . (Man mache sich klar, dass *all* dies einfache Folgerungen aus den oben ausgeführten Grundaussagen über Fluchtpunkte und Fluchtgeraden sind, und begründe im einzelnen die Konstruktion, wie sie in folgender Abbildung dargestellt ist.)



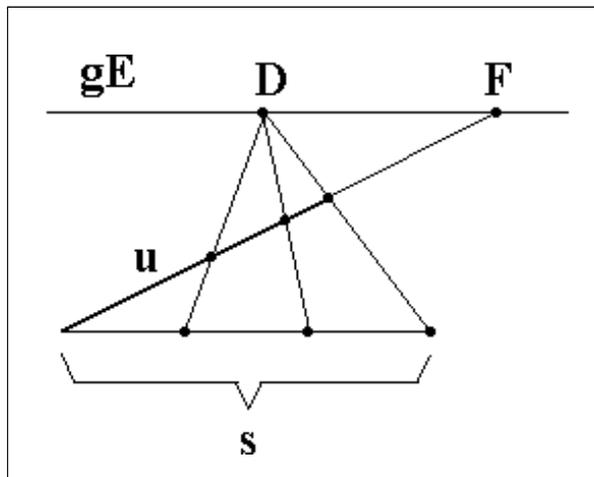
4.5 Vervielfältigen und Teilen von Strecken

Wir setzen Strecken voraus, die nicht parallel zur Bildebene verlaufen; denn nur in diesem Falle ist die Aufgabe interessant, da man sonst einfach „naiv“ vervielfältigen und teilen kann. Unsere Aufgaben sind unmittelbar mittels der Grundaussagen über Fluchtpunkte zu bewältigen.

Das Vervielfältigen: Vorgegeben sei eine beliebige Strecke u im Bilde, auf einer Geraden, deren Fluchtpunkt F bekannt sei. Sie kann verdoppelt werden, indem man gemäß folgender Skizze die Strecke zu (irgendeinem) Parallelogramm (im Bilde) ergänzt und anschließend über eine geeignete Diagonale den zugehörigen Diagonalenfluchtpunkt (D in der Skizze) bestimmt und das Parallelogramm verdoppelt. Für ersteres Parallelogramm denkt man sich irgendeine Ebene, auf der die Ausgangsstrecke liegt, also irgendeine Fluchtgerade g_E für eine solche Ebene E , auf der lediglich F liegen muss (gemäß unserem Resultat über Fluchtgeraden von Ebenen). Folgende Skizze veranschaulicht die Konstruktion (G ist der Fluchtpunkt der zweiten willkürlich gewählten Richtung der Parallelogrammseiten):



Analog ist auch das gleichmäßige Einteilen von Strecken auszuführen, wie die folgende Skizze illustriert:



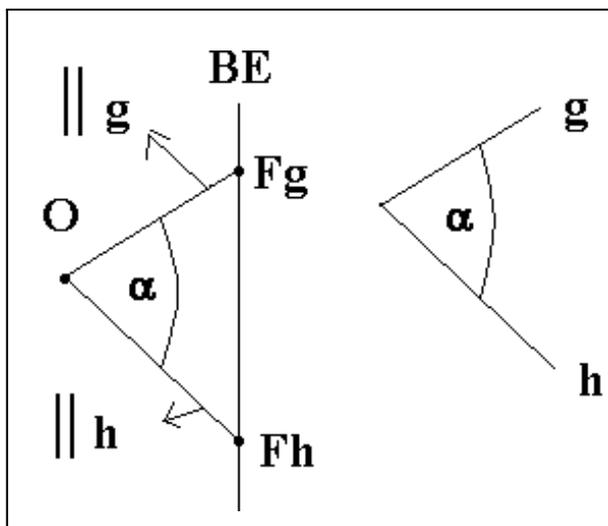
Man denkt sich im Anfangspunkt der vorgegebenen Strecke u (deren Fluchtpunkt F wiederum bekannt sei) eine weitere Strecke s , die parallel zur Bildebene und zur Bodenebene verläuft. Beide Strecken spannen ein Dreieck auf, dessen Ebene E einfach die Parallele zum Horizont durch F als Fluchtgerade g_E besitzt. Nun können wir s naiv teilen und diese Teilung korrekt auf u übertragen, indem wir die Endpunkte von s und u bis zum Fluchtpunkt (auf g_E !) der entsprechenden Strecke verbinden und Parallelen (im Bilde also zum selben Fluchtpunkt und nicht parallel!) zu den andern Teilungspunkten ziehen. Gemäß dem Strahlensatz sind nun die Abstände der entstehenden Einteilung von u gleich (in Wirklichkeit, natürlich nicht im Bilde, wo man wieder die typische Verkürzung beobachtet).

4.6 Konstruktion von Winkeln mit vorgegebenem Winkelmaß

Betrachten wir noch einmal die vorige Abbildung: Welchen Anhalt haben wir eigentlich dafür, die Hausblöcke als senkrecht aufeinanderstoßend zu betrachten oder auch nur dafür, die Grundrisse der einzelnen Blöcke als rechtwinklig aufzufassen? Offenbar nur den

der Gewohnheit. Aber ist diese Interpretation konsistent, gleichgültig, welchen Abstand die Punkte F_1, F_2 voneinander haben, und wäre eine andere Interpretation der Winkel ebenfalls korrekt? Die Antwort ist für beide Fragen positiv. Das wollen wir nunmehr genauer verstehen, weitergehend aber auch einsehen, welche Dinge es denn sein könnten, die eine solche Wahl nicht mehr lassen. Schließlich wollen wir eine allgemeine zeichnerische Winkelkonstruktion angeben, die mit entsprechenden Vorgaben zu arbeiten weiß.

Zunächst fällt auf: Nehmen wir einen Betrachterstandpunkt, genauer einen Hauptpunkt rechts oder links von beiden Fluchtpunkten F_1, F_2 an, so *kann* der Winkel zwischen dorthin fluchtenden Geraden nicht mehr *konsistent* als rechter interpretiert werden. Weiter beobachten wir, dass der korrekte Abstand zwischen den Fluchtpunkten von der Entfernung zwischen Auge und Hauptpunkt abhängt - in unserer keinen Skizze ist er in der Tat zu klein für einen Winkel von 90 Grad, wenn man einen vernünftigen Mindestabstand für scharfes Sehen verlangt. Diese beiden Beobachtungen müssen wir lediglich ein wenig präzisieren, um unser Winkelproblem zu lösen. Folgende Skizze deckt den ganzen Sachverhalt auf:

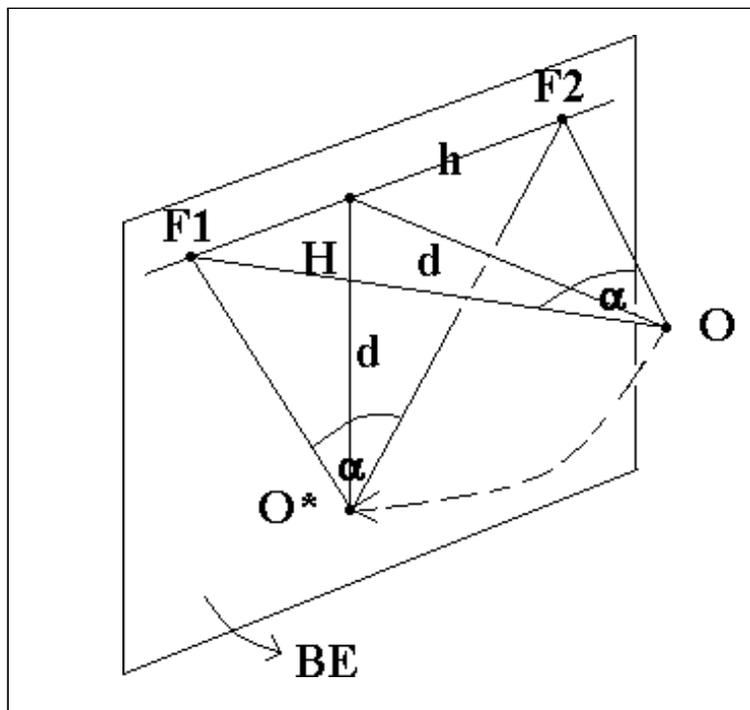


Resultat:

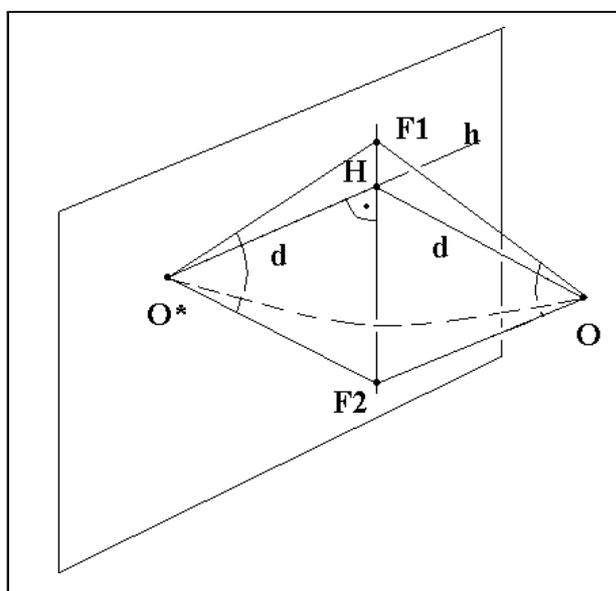
Der Winkel zwischen zwei Geraden g und h ist derselbe wie der Winkel des Dreiecks F_gOF_h . (Das gilt auch für Fluchtpunkte im Unendlichen. Man muss lediglich auf die Laufrichtung oder Orientierung achten - diese Rücksicht muss auch beim Arbeiten mit den Fluchtpunkten im Endlichen walten: Mit Entfernung vom Betrachter auf einer Geraden nähert man sich im Bilde deren Fluchtpunkt, sonst nicht.)

Dies Resultat münzt man zu praktischen Verfahren um, indem man sich das Dreieck F_gOF_h (dies steht räumlich ab von BE) irgendwie in die Bildebene dreht. Besonders einfach gelingt dies bei Ebenen, die parallel zum „Boden“ liegen, und bei Tiefenebenen (senkrecht zum Boden und zur Bildebene), wie folgende Abbildungen zeigen:

Konstruktion des Winkelmesspunktes $O^*(E)$ (in der Skizze kurz „ O^* “ genannt) für die Bodenebene E und ihre Parallelen):



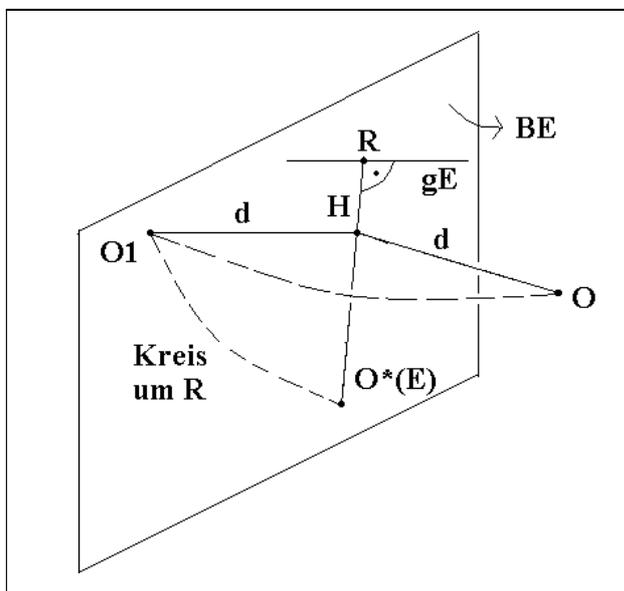
Konstruktion des Winkelmesspunktes für Tiefenebenen:



Grundsätzlich erhält man zwei äquivalente Winkelmesspunkte, zu beiden Seiten der fraglichen Fluchtgeraden.

Bei Ebenen in allgemeiner Lage wird eine etwas kompliziertere Konstruktion erforderlich, die selbstverständlich für die vorweggenommenen einfachen Fälle dasselbe Resultat

liefert. Folgende beiden Skizzen zeigen zuerst die dreidimensionale Konfiguration, welche die Konstruktion begründet, sodann die Konstruktionsschritte in der Bild- oder Zeichenebene selbst, also das praktische Rezept.



Wir fassen die praktische Essenz zusammen:

Aufgabe: Ein Winkel, dessen wirkliches Maß vorgegeben ist, soll korrekt in ein Zentralbild eingemessen werden. Vorgegeben sein muss dazu die Distanz d , der Abstand zwischen O und H . (Vorausgesetzt ist, dass der Winkel nicht auf einer Ebene parallel zu BE liegt - in diesem Falle wäre er korrekt naiv zu zeichnen.)

Die Lösung der Aufgabe geschieht in folgenden Schritten:

- (a) Man bestimmt eine Ebene E , auf welcher der Winkel liegt, und die Fluchtgerade g_E von E .
- (b) Man bestimmt gemäß der Skizze der Reihe nach R , O_1 und $O^*(E)$. (Dafür wird g_E benötigt.) Im einzelnen: R ist der Fußpunkt des Lotes von H (Hauptpunkt) auf g_E . O_1 erhält man durch Abtragen der Distanz von H ausgehend parallel zu g_E . $O^*(E)$ bestimmt sich dann als einer der beiden Schnittpunkte zwischen der Lotgeraden auf g_E durch R (und H) und dem Kreis um R , auf dem O_1 liegt. Man beachte: Zu verschiedenen Ebenenrichtungen gehören völlig verschiedene Winkelmesspunkte O^* .
- (c) Der einzumessende Winkel wird meist ein solcher sein, der an einem Bildpunkt, den man schon kennt, an ein schon vorhandenes Bild einer Strecke auf einer Geraden g angelegt werden soll. Zunächst benötigt man den Fluchtpunkt F_g , den man sich verschaffen muss, wenn man ihn nicht schon kennt. Nunmehr

Die Fluchtgerade von E liegt parallel zur Drehachse, ebenfalls in Blickrichtung, an der Stelle, wo R markiert ist. Der Punkt R liegt auf der Fluchtgeraden g_E gerade dort, wo das Lot von H auf g_E trifft, und die Drehsehnenfluchtpunkte D_1 und D_2 sind gerade die Winkelmesspunkte für E , ebenfalls auf jener Lotgeraden gelegen, die senkrecht zur Blickrichtung auf BE verläuft. O und H liegen auch im allgemeinen Fall in der gewählten Blickrichtung auf derselben „Höhe“ wie D_1 , D_2 und R . Auf der Ebene F ist ein Punkt dick markiert, durch Drehsehnen mit den Resultaten der Drehung in E nach beiden möglichen Richtungen verbunden. Diese drei Punkte liegen in Blickrichtung auf gleicher Höhe, jedoch nicht notwendigerweise auf derselben wie die Fluchtpunkte D_1 und D_2 . Die Parallelen der Drehsehnen durch O führen auf die Drehsehnenfluchtpunkte.

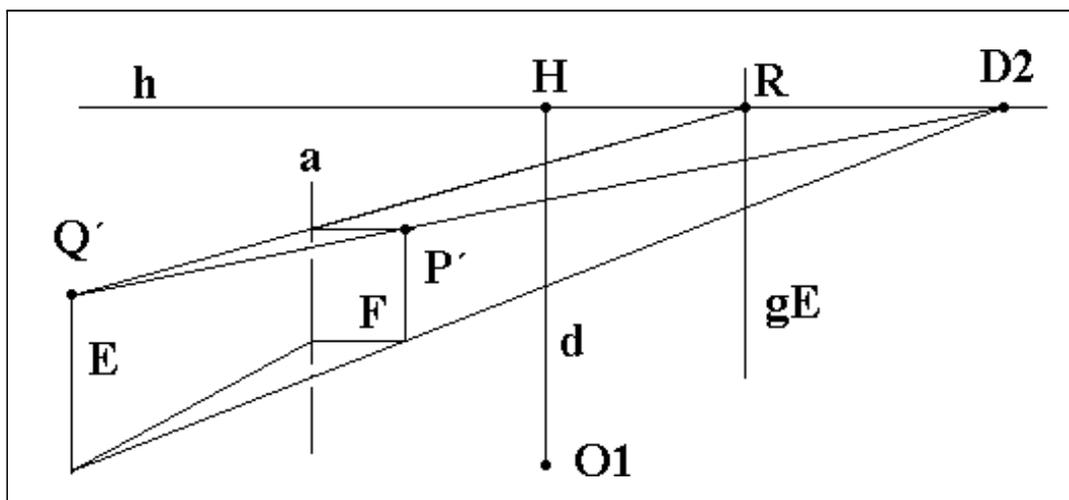
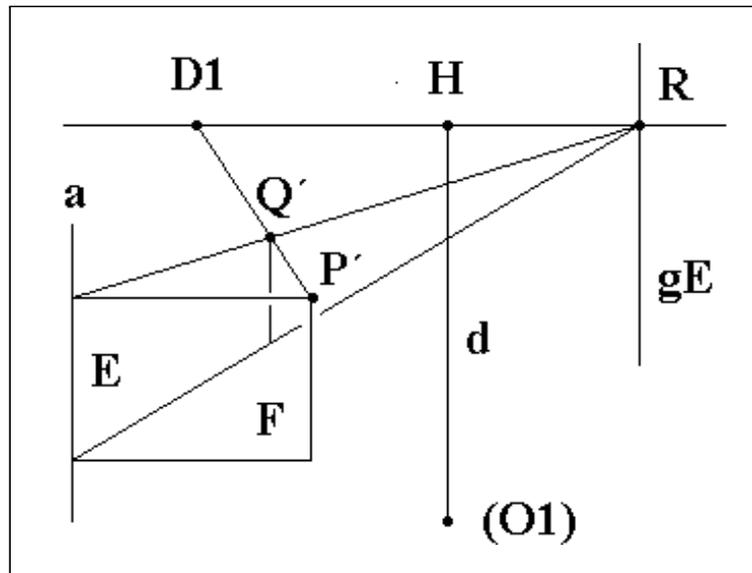
Damit haben wir folgendes allgemeine

Resultat:

Eine Ebene F parallel zur Bildebene werde um eine Achse a , die innerhalb von F liege, in eine Ebene E hineingedreht. Dann gilt:

- (a) **Die Drehsehnenfluchtpunkte der Drehung sind die Winkelmesspunkte O^* der Ebene E . (Zwei verschiedene, da um die Achse a in zwei Richtungen in die Ebene E hinein gedreht werden kann, mit zwei Winkeln, die einander zu 180 Grad ergänzen.)**
- (b) **Sei P ein Punkt auf F , Q der Punkt auf E , der aus P durch Drehung um a entsteht. Dann erhält man den Bildpunkt Q' von Q aus dem Bildpunkt P' von P einfach, indem man folgende beiden Geraden (in der Bildebene) miteinander schneidet:**
 - 1.) **Man zieht von P' zum Drehsehnenfluchtpunkt (dem richtigen der beiden). Dies bestimmt die erste der beiden Geraden.**
 - 2.) **Man betrachtet das Lot von P auf a und das Resultat der besagten Drehung dieser Lotgeraden um a : Aus dem Bild des Lotes ermittelt man das Bild nach Drehung einfach, indem man in der Bildebene von P' das Lot auf a fällt (wir sind in $F \parallel BE$ (!)) und dann vom Fußpunkt zum Fluchtpunkt R auf der Fluchtgeraden g_E von E .**

Folgende Skizzen zeigen die Konstruktion für den anschaulich besonders einfachen Fall der Drehung um eine Achse, die senkrecht auf der „Bodenebene“ steht - das erste Mal wird nach hinten gedreht, das zweite Mal nach vorn - entsprechend benötigt man je den einen oder anderen der Winkelmesspunkte als Drehsehnenfluchtpunkt:



4.8 Das Zeichnen von zentralperspektivisch korrekten Schatten bei einer unendlich fernen Lichtquelle (Sonne)

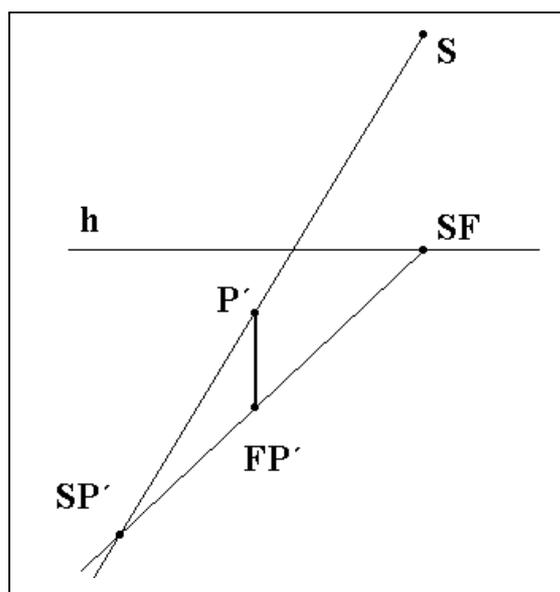
Die gestellte Aufgabe ist sehr leicht gelöst, wenn man nur folgenden Ansatz macht: Die Sonne wird vereinfachend als unendlich fern betrachtet, die einfallenden Sonnenstrahlen somit parallel. Wir betrachten den interessanten Fall, in dem die Sonnenstrahlen nicht parallel zur Bildebene liegen und somit ihren Fluchtpunkt - wir nennen ihn den Sonnenpunkt S - im Endlichen haben. Dabei treten nun folgende beiden Fälle auf:

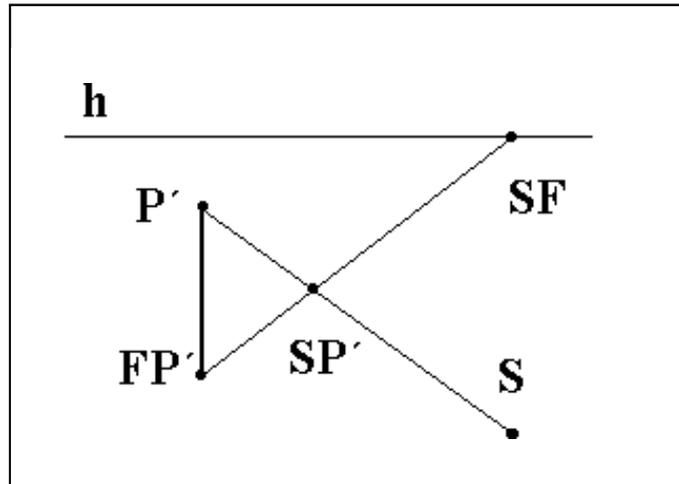
Einmal kann die Sonne vor dem Betrachter liegen - der Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen ist dann der Punkt, in dem die Sonne erscheint (nur als Punkt erscheint sie, wenn man sie als unendlich fern annimmt), oberhalb des Horizontes.

Im andern Fall steht die Sonne hinter dem Betrachter. Dann liegt der Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen, der Sonnenpunkt, unterhalb des Horizontes, als Bild des Antipoden

des (nicht sichtbaren) Punktes, in dem die Sonne steht.

Nun zur Schattenkonstruktion: Ein Gegenstand werfe einen Schatten auf eine Oberfläche. Zum Gegenstand gehöre der Punkt P , dessen Bildpunkt P' bekannt sei. P werfe den Schattenpunkt SP auf jene Oberfläche. Zunächst einmal liegen P' und SP' auf dem Bild des Sonnenstrahls, der durch P geht, also auf der Geraden durch S und P' . Damit haben wir bereits ein sehr wichtiges Bestimmungsstück für das Bild SP' des Schattenpunktes von P . Eigentlich haben wir den Sonnenstrahl mit der Oberfläche zu schneiden, auf die der Schatten geworfen wird. Das ist im allgemeinen, etwa bei gekrümmten Oberflächen, schwierig - in diesem Falle greift man am besten auf mathematische Beschreibungen der Objekte zurück und benutzt die im folgenden Abschnitt zu besprechende rechnerische Methode zur Bildkonstruktion. Im einfachen Falle jedoch wird der Schatten auf unsere idealisierte „Bodenebene“ geworfen, und dann ist folgende einfache zeichnerische Konstruktion möglich: Über den Fußpunkt FP von P auf der Bodenebene, genauer dessen Bild FP' , ermittelt man mittels des Sonnenfußpunktes SF das Bild der senkrechten Projektion („senkrecht“ zur Bodenebene) des Sonnenstrahls durch P auf die Bodenebene. Damit schneidet man einfach das Bild des Sonnenstrahls durch P , wie folgende Skizzen für beide wesentlichen Fälle von Sonnenständen zeigen:

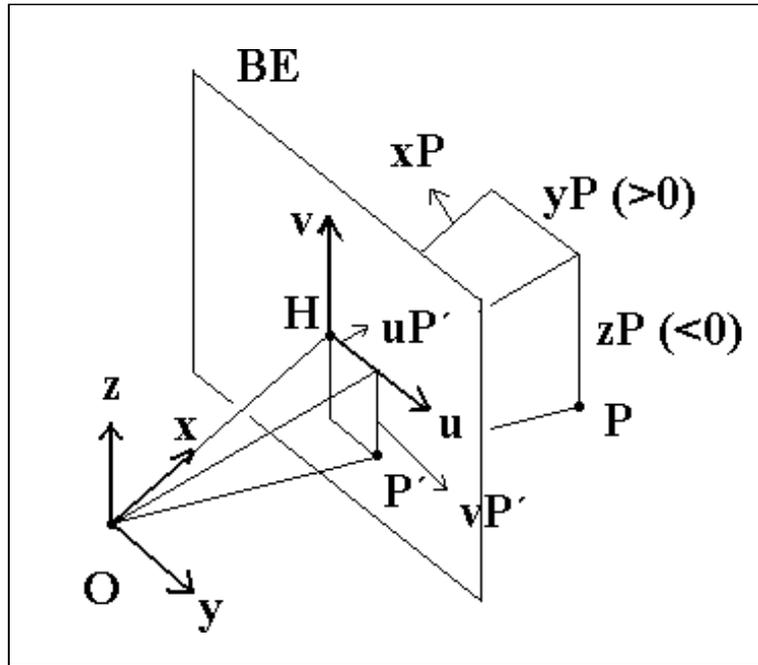




Man beachte, dass wir über unsere Winkelkonstruktion durchaus genau mit vorgelegtem Sonnenstand arbeiten können.

4.9 Das Einmessen spezieller Punkte und das Erzeugen von Zentralbildern mit dem Computer

Bisher haben wir noch nicht im praktischen Sinne die Aufgabe behandelt, einen Punkt mit wohlbestimmter Lage in der dreidimensionalen Wirklichkeit (vom Betrachter aus gesehen) jenseits der Bildebene genau auf die Bildebene zu projizieren. Ist das bewältigt, so wird es insbesondere möglich, Größe und Lage eines Objektes sowie Distanz und Hauptpunkt vorzugeben und das korrekte Zentralbild zu produzieren. Wir werden zu dem Ergebnis gelangen, dass die Daten für den Bildpunkt rechnerisch sehr leicht aus den Daten des Originals ausgerechnet werden können, wenn man Koordinatensysteme für Urbild und Bild in folgender bequemen Weise wählt:

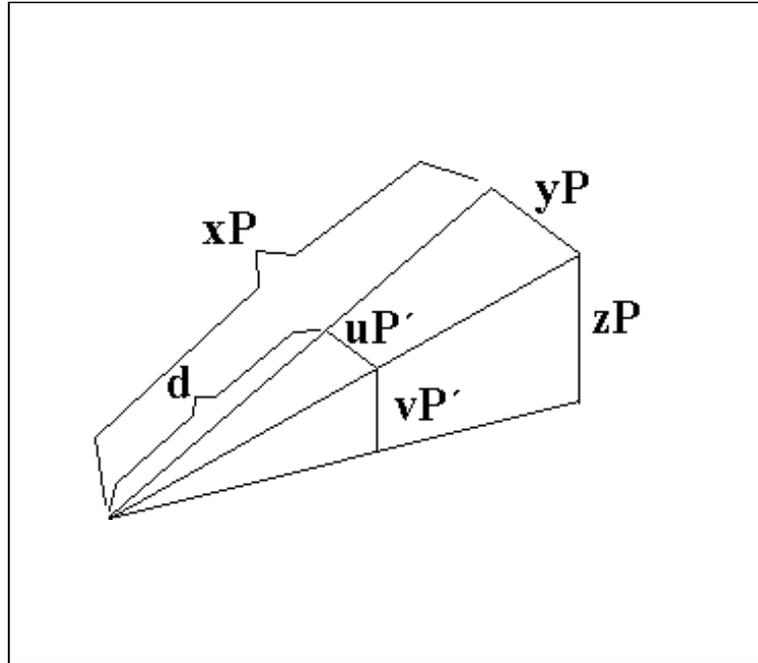


Koordinatensystem K ((x, y, z) -System mit Ursprung O) für die Urbilder (Originalpunkte) und angepasstes Koordinatensystem L ((u, v) -System mit Ursprung H) für die Bildpunkte:

Nunmehr führen wir folgende Bezeichnungen ein, die in der Skizze bereits benutzt und in ihrer Bedeutung illustriert sind:

$$\begin{aligned} (x_P, y_P, z_P) &= \text{Koordinatentripel des Punktes } P \text{ im System } K, \\ (u_{P'}, v_{P'}) &= \text{Koordinatenpaar des Bildpunktes } P' \text{ im System } L. \end{aligned}$$

Unser Problem lautet, wie man $(u_{P'}, v_{P'})$ aus (x_P, y_P, z_P) berechnen kann. Folgende Skizze zeigt auf geometrische Weise, wie $u_{P'}$ mit x_P, y_P zusammenhängt - die Skizze zeigt genau allein die schiefe vierseitige Pyramide mit Spitze in O (die von O am weitesten entfernt liegende Ecke ist P), die in der vorigen Abbildung als die Bildebene durchschneidend erkennbar war, und zeigt noch einmal alle relevante Bezeichnungen, darunter auch die Distanz d (Abstand zwischen Augpunkt O und Hauptpunkt H):



Gemäß dem Strahlensatz haben wir, da die Strecke mit der Länge y_P parallel zu der mit der Länge $u_{P'}$ ist (analog liegt die Sache für z_P und $v_{P'}$):

$$\frac{x_P}{d} = \frac{y_P}{u_{P'}} = \frac{z_P}{v_{P'}}.$$

Das gilt auch für negative $z_P, v_{P'}$ wie in unserem gezeichneten Beispielpunkt, ebenso natürlich für den Fall, dass y_P und $u_{P'}$ negativ wären. Durch Umformung der Gleichungen erhalten wir, zugeschnitten auf unser Problem, zu gegebener Distanz und Urbildkoordinaten die Bildkoordinaten auszurechnen, folgendes

Resultat: Für Koordinatensysteme wie in obenstehender Abbildung gelten folgende Umrechnungsformeln:

$$u_{P'} = \frac{y_P}{x_P} \cdot d,$$

$$v_{P'} = \frac{z_P}{x_P} \cdot d.$$

Anwendungsbeispiel: Das Auge sitze einen Meter über dem Boden, auf dem 9.8 Meter hinter der Bildebene parallel zur Standlinie (parallel zur Bildebene und zum Horizont) eine 10 Meter lange Strecke liege, deren linker Endpunkt 3 Meter nach links gegen die Achse Auge-Hauptpunkt versetzt ist. Die Distanz betrage 20 cm. Gesucht sind die Bildkoordinaten der Strecken-Endpunkte. - Nennen wir den linken Endpunkt P , so haben

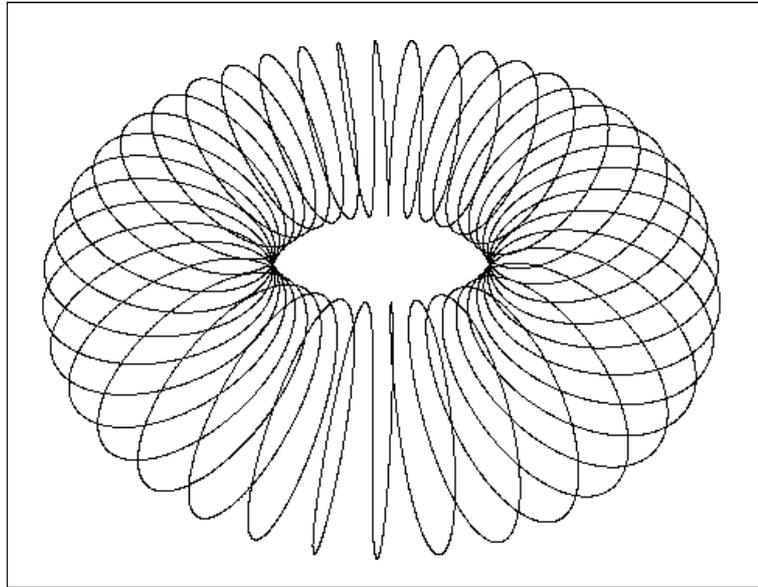
wir gemäß den Angaben:

$$\begin{aligned}(x_P, y_P, z_P) &= (10, -3, -1), \text{ also gemäß den Formeln:} \\ u_{P'} &= \frac{y_P}{x_P} \cdot d = \frac{-3}{10} \cdot 0.2 = -0.06, \\ v_{P'} &= \frac{z_P}{x_P} \cdot d = \frac{-1}{10} \cdot 0.2 = -0.02.\end{aligned}$$

Man geht also vom Hauptpunkt 6 cm nach links und 2cm nach unten, um P' zu gewinnen. Für den rechten Endpunkt könnte man dasselbe durchführen, aber besser überlegt man, dass man für jede Ebene parallel zur Bildebene einen einheitlichen Maßstab besetzt, der mit dem ersten Beispiel bereits bestimmt wurde: den 3 Metern Linksversetzung entsprechen 6 cm Linksversetzung (gegen H) im Bilde. Daher können wir für den rechten Endpunkt Q sofort feststellen:

$$\begin{aligned}u_{Q'} &= 0.14, \\ v_{Q'} &= -0.02.\end{aligned}$$

Dies Verfahren wird in zweierlei Zusammenhängen nützlich: Wenn man „von Hand“ ein Zentralbild produzieren möchte, so kann man sich die benötigten Ausmaße klarmachen und außerdem das Gewünschte im Bilde mittels einiger markanter Bildpunkte fixieren - weiteres kann man dann mittels der oben angeführten Techniken (zur Bestimmung von Schnitten, Winkeln und Bildern gedrehter Objekte) konstruktiv gewinnen. Wenn man mittels Computereinsatzes ein Zentralbild herstellen möchte, so kann man dies auch für sehr komplizierte Objekte (aus vielen Punkten in schwierigen Beziehungen bestehend) und schwierige Ansichten tun: Für die Beschreibung des Objektes hat man mathematisch eine Parametrisierung, die zu jeder Zahl (oder jedem Zahlenpaar oder jedem Zahlentripel), die man in einem bestimmten Bereich mit gewissen Sprüngen laufen lässt, jeweils genau einen Punkt P (genauer dessen dreidimensionale Koordinaten) ausrechnet. Dann kann man nach Belieben noch Drehungen und Versetzungen anbringen, die zugehörigen Koordinaten ausrechnen, schließlich nach den obenstehenden Formeln die Bildkoordinaten, die dann mit einfachen Befehlen graphisch umzusetzen sind. All dies erledigt ein entsprechendes Computerprogramm in vielfach kaum merklicher Zeit. Hier ist ein Beispiel einer um einen Torus (Reifen) gewundenen Spirale, das man schon lieber nicht „zu Fuß“ erledigen möchte (übrigens entstanden auch die früher gezeigten Zentralbilder von Dodekaeder und Ikosaeder auf diese Weise):



4.10 Zum Zeichnen verkleinerter Zentralbilder

Wir kehren noch einmal zurück zu den zeichnerischen Konstruktionen: Beim Lösen einzelner Aufgaben stießen wir des öfteren auf das Problem unerreichbarer Fluchtpunkte, die jedoch für eine Konstruktion etwa benötigt werden. Dies Problem kann nicht nur durch Rechnung umgangen werden, sondern der letzte Abschnitt eröffnet auch eine neue zeichnerische Möglichkeit: Dort wurde klar, dass die Koordinatenwerte der Bildpunkte im (u, v) -System mit Ursprung H einfach proportional von der Distanz d abhängen. Wenn wir die Koordinaten der zu zeichnenden Gegenstände unverändert lassen, die Distanz d jedoch mit einem Faktor multiplizieren, zu $d_1 = \alpha d$ ($\alpha > 0$) übergehen, dann erhalten wir das neue Zentralbild mit d_1 bei Bewahren des Hauptpunktes H einfach durch zentrisches Strecken mit Faktor α um das Zentrum H . Das können wir uns so zunutze machen, dass wir mit einer (für Erreichbarkeit wichtiger Fluchtpunkte) verkleinerten Distanz entwerfen und anschließend die entsprechende Streckung unseres Bildes vornehmen.

4.11 Zur Wahl von Distanz und Bildausschnitt bzw. Bildgröße

Die Distanz ist rein mathematisch gesehen beliebig wählbar, als ein Abstand > 0 . Aber pragmatisch sind drei Randbedingungen zu beachten:

- Man kann erst (altersabhängig) ab etwa 20 cm Entfernung auflösen und scharf sehen, eine solche Distanz stellt somit das erreichbare Minimum dar.
- Das menschliche Auge erlaubt scharfes Sehen und Sehen überhaupt nur in einem bestimmten Winkel um die Sehachse. Umgerechnet bedeutet das: Dem menschlichen Sehwinkel entspricht ein Bildausschnitt von einem Kreis mit Radius $0.6 \cdot d$ um den Hauptpunkt H . Stellt sich also ein Betrachter in richtiger Distanz zum Bilde

auf, senkrecht auf H blickend, dann sieht er nur, was in diesem Kreise ist. Etwaige Bildteile weiter außen werden dann gar nicht wahrgenommen. Möchte der Betrachter solche Teile noch zusätzlich sehen, so muss er automatisch eine falsche Position einnehmen, für die das Bild nicht korrekt konstruiert wurde - es werden dann Dinge sichtbar, die so ungewohnt sind, dass sie geradewegs falsch und außerordentlich unästhetisch wirken, obgleich das Zentralbild für die kleinere Distanz durchaus korrekt konstruiert sein mag. Also sollte das darzustellende Projekt so gefasst sein, dass sich die Darstellung etwa in jenem Kreise vom Radius $0.6d$ befindet.

- Große Distanzen sind schön, fordern aber natürlich große Bilder, wenn nur einiges darauf sein soll. Auch große Gegenstände in geringer Entfernung verlangen (bei fixierter Distanz) relativ große Bilder. Dazu zeigen sie stark stürzende Linien, insbesondere bei kleineren Distanzen. So etwas wirkt besonders dynamisch, unruhig, und man muss wissen, ob man diesen Effekt im Bildkontext wünscht oder gerade vermeiden möchte.