27. September

Heute Ende des ersten Kursteiles. Abrundung und Konsolidierung jetzt.
Ab Montag zweiter Teil mit gewissem Zeitdruck .
Heute "Übungen üben!" Die Übungen gehen im Wesentlichen den bisherigen Stoff durch und benötigen die besprochenen allgemeinen Resultate und Schemata!

Unten die Notizen aus der Veranstaltung (zu einigen Aufgaben)**!**

Kap.1 Zu merkende Formeln?

1.1) Vereinfachen Sie mit Hilfe der jeweils zulässigen Rechenregeln die folgenden Rechenausdrücke

$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = ... \qquad \text{a,b} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A} = (x-y)(\vec{a}-\vec{b}) \qquad \vec{B} = (x+y)(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \text{Berechnen Sie}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{A}\times\vec{B} \quad . \quad \vec{a},\vec{b} \in V_0^3 \qquad \text{Zeitbedarf?}\square$$

1.2) Berechnen Sie $(1+i)^5$ mit Hilfe des Binomischen Satzes. Zeit? $\boxed{\text{2 min}}$

1.3) Wir betrachten die Parabel mit Gleichung $y=x^2$. Der Punkt P_a dieser Parabel habe den Koordinatenvektor $\vec{x}_a = (a, a^2)$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an diesen Punkt und eine Gleichung der Normalen an diesen Punkt. (Die Tangente hat die Steigung (1,2a), die Normale hat die Steigung (-2a,1)).
a) Wo schneidet die Tangente die x-Achse, wo die Normale? (Mit Skizze, Bezeichnungen einführen)
b) Für welchen a-Wert ist der Normalenschnittpunkt 4-mal so weit vom Ursprung entfernt wie der Tangentenchnittpunkt? Zeit? $\square$

1.4) Ein Ursprungskreis $K_{\vec{0}}$ wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ gegeben.. Der Kreis soll um den Vektor $\vec{a}^K = (a,b)$ verschoben werden. (D.h. $\vec{a}$ beschreibt den neuen Kreismittelpunkt.)
a) Geben Sie eine Gleichung für den verschobenen Kreis!
b) Was geschieht für $\vec{a}^K = (R,0)$?

1.5) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
"Für n=1,2,3,... gilt $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\binom{n+1}{2}$ "
a) Zuerst das allgemeine Schema.... Dann: D.h. .... b) Dann den fallspezifischen Rest

---

Kap. 2,3 Zu merkende Formeln / Sachverhalte?

Die Ebene E schneidet die drei Achsen in den durch (2,0,0) und (0,2,0) und (0,0,3) gegebenen Punkten. Die Ursprungsgerade g habe den Richtungsvektor (1,1,1).
a) Fertigen Sie eine Skizze dieser räumlichen Konfiguration.
b) Schätzen Sie zunächst über die Skizze die Lage des Schnittpunktes von g und E.
c) Berechnen Sie den Schnittpunkt (Kap.4)
d) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E

Kap 4 Zu merkende Formeln? Schnittpunktschema!

4.1) Gegeben 4 Punkte P,Q,R,S$\in E^3$ über ihre zugehörigen Ortsvektoren aus V_0^3.
A sei der Mittelpunkt zwischen P und Q und B der von R und S. Geben Sie eine Parametrisierung der Verbindungsgeraden von A und B.

4.2) Wir betrachten die Parabel mit Gleichung y=x^2. Der Punkt P_a dieser Parabel habe den Koordinatenvektor $\vec{x}_a = (a, a^2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an diesen Punkt und die Gleichung der Normalen an diesen Punkt. (Die Tangente hat die Steigung (1,2a), die Normale hat die Steigung (-2a,1)).

a) Wo schneidet die Tangente die x-Achse, wo die Normale? (Mit Skizze, Bezeichnungen einführen)

b) Für welchen a-Wert ist der Normalenschnittpunkt 4-mal so weit vom Ursprung entfernt wie der Normalenschnittpunkt?

Flugparabelaufgaben Das Schema: t_1, $\vec{r}_1, \vec{v}_1$ $\vec{g}$
$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 T + \frac{1}{2}\vec{g}T^2$
....$f\ddot{u}r$ diesen Fall $\vec{v}(t)$ T=t-t_1.......in Tupelform

---

4.3) Die Ebene E schneidet die drei Achsen in den durch (2,0,0) und (0,2,0) und (0,0,3) gegebenen Punkten. Die Ursprungsgerade g habe den Richtungsvektor (1,1,1).

a) Fertigen Sie eine Skizze dieser räumlichen Konfiguration.

b) Schätzen Sie zunächst über die Skizze die Lage des Schnittpunktes von g und E.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt

Kap5 Zu Merkendes: Das Eliminationsschema! Und Vorsicht bei äußerem Parameter und Ausdehnbarkeit auf die komplexen Zahlen und gewisse Vektorgleichungen!!!

5.1) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme (x,y Unbestimmte, a,b äußere Parameter)

$$\begin{matrix} 2x+3y=4 \\ 3x+5y=7 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 2x+ay=4 \\ 3x+4y=b \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} (2+i)x+3iy=4 \\ 3ix+(2+i)y=i \end{matrix}$$

Lösen Sie die quadratische Gleichung $\boxed{iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0}$ Sind die beiden Lösungen zueinander konjugiert komplex?

5.2) Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem nach $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ auf. Welche inhaltliche Interpretation ist naheliegend?

$$\begin{aligned} M\vec{x}_S &= m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 \\ \vec{d} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Begründen Sie, dass auch hier das Eliminationsschema aus Kap. 5.2 zulässig ist.

5.3) "Zeile mal Spalte"

Für ein linearesGleichungssystem $\underline{M.\vec{x} = \vec{b}}$ sei M= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem aus und lösen Sie es.

b) Der Lösungsvektor sei $\vec{x}_L$. Zeigen Sie, dass man $\vec{x}_L = N.\vec{b}$ schreiben kann, wobei auch N eine 3×3 Matrix ist (N ist natürlich M^{-1} !!!)

c) Berechnen Sie über die Regel "Zeile mal Spalte" das Matrixprodukt M·N. Kommentar?

Kap 6

6.1) **Fingerübungen**: Seien P,Q und R drei Punkte aus E^3 mit Ortsvektoren $\vec{x}_P = (3,4,0)$ und $\vec{x}_Q = (0,2,3)$ sowie $\vec{x}_{RS} = \vec{x}_P \pm \vec{x}_Q$.

a) Zeichnen Sie diese Konfiguration. (Räumliche Lage muss zu erkennen sein!)

b) Berechnen Sie 1.) den Winkel zwischen $\vec{x}_p$ und $\vec{x}_Q$. 2.) $\vec{x}_P \times \vec{x}_Q$ und 3) den skalaren Abstand von P und Q.

6.2) Zeigen Sie: In einem Rombus (Parallelogramm mit 4 gleichlangen Seiten) stehen die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht. (Skizze!)

6.3) Eine Ebene E werde durch eine Parametrisierung gegeben. Bestimmen Sie den Vektor des kürzesten Abstandes vom Ursprung zur Ebene! Formulieren Sie die Vorgehenstrategie.

- Das Vektorpr. der beiden Richtungsv. sei $\vec{n}$, hat Richtung der Normalen von E
- Bilde Ursprungsgerade in Richtung $\vec{n}$. Das sei k
- Schneide k mit E. Der Ortsvektor des Schnittpunktes ist der gesuchte Vektor des kürzesten Abstandes. Beweis: ... Besprochen

---

6.4) Es gelte $\vec{D} = x\vec{a} + y\vec{b} + z(\vec{a} \times \vec{b})$. Die Koordinaten x und y sollen bestimmt werden. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung einmal skalar mit $\vec{a}$ und einmal mit $\vec{b}$. Mit Hilfe der beiden entstehenden Gleichunge können Sie x und y bestimmen tun Sie das

Wie erhält man z?

6..5) Beschreiben Sie die Ebene F mit $\vec{x}_F^K(u,v) = (1{+}u, 2{+}u{+}v, 3{+}u{-}v)$ durch drei Ebenengleichungen, mit deren Hilfe man sofort Aussagen über die Lage von R relativ zu K erhält. $\vec{A} \cdot \vec{x} = B$

Kap.6.3

(6.3.1)Bestimmen Sie **zeichnerisch** näherungsweise die beiden komplexen Zahlen $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ für $z_1 = -1 + \frac{1}{2}i$ und $z_2 = 1 + i$.

6.3.1 Was (für ein komplexer Widerstand) ergibt sich für die Hintereinanderschaltung zweier Kondensatoren, was für deren Parallelschaltung?

Die Notizen aus der Besprechung der Aufgaben!

Kap.1 Zu merkende Formeln?
Binomi /Doppelbruch/ p-q-Formel / Formen des quadr. Polynoms
Formen der Geradengl.

1.1) Vereinfachen Sie mit Hilfe der jeweils zulässigen Rechenregeln die folgenden Rechenausdrücke

$$D = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = ... \qquad \text{a,b} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (x-y)(\vec{a}-\vec{b}) \qquad \vec{B} = (x+y)(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \text{Berechnen Sie} \\ & \vec{A}\cdot\vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{A}\times\vec{B} \quad . \quad \vec{a},\vec{b} \in V_0^3 \qquad \text{Zeitbedarf?}\square \end{aligned}$$

$$D = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{B} &= (x^2-y^2)(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (x^2-y^2)(\vec{a}^2-\vec{b}^2) \\ \vec{A}\times\vec{B} &= (x^2-y^2)(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b}) = 2(x^2-y^2)\vec{a}\times\vec{b} \end{aligned}$$

$$(1+i)^5 = 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5 = (1-10+5) + i(5-10+1)$$
$$= -4 - 4i = (-4)(1+i)$$
$$(1+i)^5 = -4 - 4i$$

1.3) Wir betrachten die Parabel mit Gleichung y=x^2. Der Punkt P_a dieser Parabel habe den Koordinatenvektor $\vec{x}_a = (a, a^2)$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an diesen Punkt und eine Gleichung der Normalen an diesen Punkt. (Die Tangente hat die Steigung (1,2a), die Normale hat den Steigungsvektor (-2a,1)=-2a(1,-$\frac{1}{2a}$).

a) Wo schneidet die Tangente die x-Achse, wo die Normale? (Mit Skizze, Bezeichnungen einführen)

b) Für welchen a-Wert ist der Normalenschnittpunkt 4-mal so weit vom Ursprung entfernt wie der Tangentenchnittpunkt? Zeit? $\boxed{\text{6-10 min}}$

Vorgehen: Skizze gemacht. / Die beiden Gleichungen als Punkt-Richtungsformeln aufgestellt / In Achsenabschnittsform gebracht. Daraus alle 4 Achsenabschnitte abgelesen und eingezeichnet. Und die geforderte Bedingung ($4a_{Tang} = a_{Normale}$) als Gleichung für a formuliert und gelöst /

1.4) Ein Ursprungskreis $K_{\vec{0}}$ wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ gegeben.. Der Kreis soll um den Vektor $\vec{a}^K = (a, b)$ verschoben werden. (D.h. $\vec{a}$ beschreibt den neuen Kreismittelpunkt.)

a) Geben Sie eine Gleichung für den verschobenen Kreis!

b) Was geschieht für $\vec{a}^K = (R, 0)$?

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= R^2 \\ x^2 - 2Rx + y^2 &= 0\end{aligned}$$

1.5) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

"Für n=1,2,3,... gilt $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}}$ "

a) Zuerst das allgemeine Schema.... Dann: D.h. .... b) Dann den fallspezifischen Rest

(1)A(n)	Allgem. zu bew. Aussage	S. Frage
(2)Start	Prüfen für N=1,(2,3)	n=1 und 2 trivial
(3)Annahme	Für n=1,...,N sei A(n) wahr	
(4) A(N+1)	ist **fallspezifisch** zu beweisen $\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{N+1}\binom{N+2}{2}$	

Zunächst sich den allgemeinen Rahmen (1-3) bewußt manchen und formulierern (2) nachweisen.
Dann (4) wie im Beispiel unten gerechnet.
Dann das Fazit:"Damit ist A(n) für alle n bewiesen"

$$\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k k^2 + (-1)^{N+1}(N+1)^2$$

$$= (-1)^N \binom{N+1}{2} + (-1)^{N+1}(N+1)^2$$

$$.. = (-1)^N \frac{(N+1)N}{2} + (-1)^{N+1}(N+1)^2$$

$$= (-1)^{N+1}(N+1)\left[-\frac{N}{2} + \frac{2}{2}(N+1)\right] \qquad \frac{1}{2}(2N+2-N) = \frac{1}{2}(N+2)$$

$$= (-1)^{N+1}\frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

Die Ebene E schneidet die drei Achsen in den durch (2,0,0) und (0,2,0) und (0,0,3) gegebenen Punkten. Die Ursprungsgerade g habe den Richtungsvektor (1,1,1).

a) Fertigen Sie eine Skizze dieser räumlichen Konfiguration.

b) Schätzen Sie zunächst über die Skizze die Lage des Schnittpunktes von g und E.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt (Kap.4)

d) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E

Das wichtige Schnittmengeschema sollte immer präsent sein!

Paramtrisierungen der Figuren, Tupelform,

$\vec{x}_g(u) = u(1,1,1) = (u,u,u)$

$\vec{x}_E(a,b) = (0,0,3) + a$(2,0,-3)+b(0,2,-3)=(2a,2b,3-3a-3b)

Gleichungssystem für die Schnittparameter, Lösung

u=2a	u=3-$\frac{3}{2}u - \frac{3}{2}u$
u=2b	4u=3
u=3-3a-3b	u=$\frac{3}{4}$

Rückeinsetzen.

d) Normalenvektor?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kap 4 Zu merkende Formeln? Schnittpunktschema!!!!

4.1) Gegeben 4 Punkte P,Q,R,S$\in E^3$ über ihre zugehörigen Ortsvektoren aus V_0^3.

A sei der Mittelpunkt zwischen P und Q und B der von R und S. Geben Sie eine Parametrisierung der Verbindungsgeraden von A und B.

Viele Wege liefern:

$$\vec{x}_A = \frac{1}{2}(\vec{x}_P + \vec{x}_Q) \quad \text{und} \quad \vec{x}_B = \frac{1}{2}(\vec{x}_R + \vec{x}_S)$$

Also: Eine Parametrisierung

$$\begin{aligned} \vec{x}_V(u) &= \frac{1}{2}(\vec{x}_P + \vec{x}_Q) + \frac{u}{2}(\vec{x}_R + \vec{x}_S - \vec{x}_P - \vec{x}_Q) \\ &= \frac{1-u}{2}(\vec{x}_P + \vec{x}_Q) + \frac{u}{2}(\vec{x}_r + \vec{x}_S) \end{aligned}$$

2x+ay=4	-3	$\boxed{\text{(8-3a)y=2b-12}}$
3x+4y=b	+2	

1.Fall $8 \neq 3a$ y=$\frac{2b-12}{6-3a}$ usw

2.Fall 8=3a Letzte Gl hinschreiben!!!!!

0y=2b-12

Fall 2a) b$\neq$ 6 Unlösbar

Fall 2b) y frei!

x=...

$(2+i)x + 3iy = 4$	-3i	x raus
$3ix + (2+i)y = i$	(2+i)	

$$y\left((2+i)^2 + 9\right) = -10i - 1$$

$\boxed{\text{(12+4i)y=-1-10i}}$

$$y=\frac{-(1+10i)}{4(3+i)}=-\frac{1}{4}\frac{(1+10i)(3-i)}{10}=\underline{-\frac{1}{40}(13+29i)}$$

$$\begin{array}{c} (2+i)x+3iy=4 \\ 3ix+(2+i)y=i \end{array},$$

5.2) Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem nach $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ auf. Welche inhaltliche Interpretation ist naheliegend?

$$\begin{aligned} M\vec{x}_S &= m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 && 1 \\ \vec{d} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 && \text{-}m_2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{M}\vec{x}_S - m_2\vec{d} = M\vec{x}_1 \\ \vec{x}_1 = \vec{x}_S - \frac{m_2}{M}\vec{d} \end{array}$$

Begründen Sie, dass auch hier das Eliminationsschema aus Kap. 5.2 zulässig ist.
