Übung zum Vorkurs 2003 12.10.03 und Wochenende

Um korrekte und vollständige Form der Antworten bemühen.

1. Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke zu einer sinnvollen Endform

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{1}{7}(3,14,10)+(\frac{4}{7},-1,\frac{3}{7})\\ \vec{d} &= \frac{1}{6}\vec{e}+\vec{f} \qquad \text{mit} \quad \vec{e}=(4,6,3) \quad \text{und} \quad \vec{f}=(\frac{1}{3},1,\frac{1}{2})\\ \vec{w} &= (\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2},2^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

2. Bringen Sie folgende Parametrisierungen (aus der Tupelform) in die geometrische Form:

$$\vec{y}_g(a)=(1-a,2a,5a-7) \qquad \text{und} \quad \vec{x}_E(u,v)=(1+u-2v,a+2u,bv)$$

3. Es sei $\vec{a}=(2,3,-1)$ und $\vec{b}=(1,0,7)$.
   (a) Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird.
   (b) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K=(4,9,-15)$ auf dieser Geraden?
   (c) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen Sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.
   (d) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

4. Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1=-2$ am Orte A und zur Zeit $\mathrm{t}_2=5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A=(-3,5,7)$ und $\vec{r}_B=(0,-4,13)$.
   (a) a)Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?
   (b) b) Angenommen, der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: Wo befindet er sich zur Zeit t=5?
   (c) c) Wann schneidet er die x-y-Ebene (bei konstanter Geschwindigkeit)?

5. In einigen Eckpunkten eines Würfels werden Massen angebracht. In den 4 Eckpunkten des oberen Deckels je eine Masse m und in einem der unteren Eckpunkt eine Masse M. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieses Systems.

6. Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(2)=(0,0,0)$ und $\vec{v}^K(2)=(5,5,10)$. Weiter sei $\vec{g}^K=(0,0,-10)$. Wie lautet die Formel für die Flugparabel? (Geometrische und Tupelform!) Wie die vektorielle Geschwindigkeit.
   (a) $\vec{r}^K(0)=....?$ $\vec{r}^K(-2)=...?$ $\vec{v}^K(-2)=....?$ $\vec{r}^K(3)=..?$
   (b) Wo liegt der Scheitelpunkt?
   (c) Wann und wo wird die Ebene z=2 getroffen?

7. Bestimmen Sie unter Verwendung des Schnittschemas den Schnitt der Geraden g mit der Ebene E sowie den Schnitt der Ebenen E und F. Dabei sei:

$$\begin{aligned}\vec{x}_g(\alpha) &= \alpha(1,2,3) \quad , \ \vec{x}_E(a,b)=(3,2,7)+a(1,1,0)+b((0,0,1)\\ \vec{x}_F(u,v) &= c(-1,1,0)+d(0,0,1).\end{aligned}$$

   (a) Was läßt sich vorab über den Schnitt von g mit F sagen? Ist noch etwas zu rechnen?

8. Ein dicker Ring aus Eisen wird erhitzt. Vergrößert oder verkleinert sich dabei der innere Radius? Welcher Bezug besteht zur Vektorrechnung? Skizzieren sie den Sachverhalt eventuell an Hand einiger einfacher Figuren.

9. Parametrisieren sie alle Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt P$\in$ E^3 gehen. Das ist mit 3 Parametern leicht, sollte aber auch mit zweien gehen. Was für ein Problem tritt auf?

10. Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates-dann Lösung.)

11. Wir betrachten die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

(a) a) Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichuing für x ein. Bestimmen Sie α so, daß sie die entstehende Glweichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

(b) b) Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3+v^3)+(u+v)(3uv+p)+q=0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und u$^3+v^3+q=0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt 27u$^3v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt v$^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Erneut folgt eine Lösung (der drei) Lösungen. (Zweite Methode.)

12. Eine Flugparabel beginnt in 0 und trifft einen schrägen Hang in P Es interessiert die horizontale Flugweite. Die geometrische Beschreibung folgt aus der Skizzze. Die Startgeschwindigkeit habe den festen Wert v.

13. Zeigen (=beweisen) Sie, daß der Schwerpunkt von drei (nicht auf einer Linie liegenden) Massenpunkten in der von den drei Punkten erzeugten Ebene liegt.

14. Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem nach $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ auf. Welche inhaltliche Interpretation ist naheliegend?

$$\begin{aligned} M\vec{x}_S &= m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 \\ \vec{d} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \end{aligned}$$

15. Vektoraddition: Ein Fluß der Breite B fließt mit konstanter -Geschwindigkeit $\vec{W}^K = (W, 0)$. In dem Fluß bewegt sich ein Boot mit Geschwindigkeit $\vec{v}^K = (v_x, v_y)$ relativ zum Wasser.
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Ufer? Wie ist die Bootsgeschwindigkeit $\vec{v}$ anzusetzen, damit das Boot bei der Ankunft am entgegengesetzten Ufer um die Strecke A abgetrieben ist?

16. Vektoraddition (Schiefe Ebene): Eine Kraft $\vec{F}^K = (0, 0, -g)$ wirkt auf einen Massenpunkt, der sich auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α gegen die 1-Achse bewegen kann.

(a) Welche geometrische Interpretation habe die drei Vektoren $\vec{e}^K = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{f}^K = (1, 0, 0)$ und $\vec{n}^K = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$ bezüglich dieser Konfiguration?

(b) Gemäß Zentralformel kann man $\vec{F}^K$ zerlegen, so dass $\vec{F}^K = \alpha\vec{e}^K + \beta\vec{n}^K$ gilt. Bestimmen Sie α und β und interpretieren Sie die Zerlegung physikalisch.

(c) Der Körper rutsche unter dem Einfluss von $\vec{F}^K$ auf der schiefen Ebene. Was kann man dann über eine eventuelle Reibungskraft (der Unterlage auf den Körper) aussagen?

Übung zum Vorkurs 2003   12.10.03 und Wochenende

Mit Antworten, ab er ohne Skizzen!

■ 1.)Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke zu einer sinnvollen Endform

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \frac{1}{7}(3,14,10) + (\frac{4}{7}, -1, \frac{3}{7}) = \underline{\frac{1}{7}(7,7,13)} \\
\vec{d} &= \frac{1}{6}\vec{e} + \vec{f} \quad \text{mit} \quad \vec{e} = (4,6,3) \quad \text{und} \quad \vec{f} = (\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}) = \\
\vec{d} &= \frac{1}{6}(4,6,3) + \frac{1}{6}(2,6,3) = \frac{1}{6}(6,12,6) = \underline{(1,2,1)} \\
\vec{w} &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 2^{\frac{3}{2}}) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,2,1,4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,2,1,4)}
\end{aligned}$$

■ 2.)Bringen Sie folgende Parametrisierungen (aus der Tupelform) in die geometrische Form:

$$\vec{y}_g(a) = (1-a, 2a, 5a-7) \qquad \text{und} \quad \vec{x}_E(u,v) = (1+u-2v, a+2u, bv)$$

▼

$$\begin{aligned}
\vec{y}_g(a) &= (1,0,-7) + a(-1,2,5) \\
\vec{x}_E(u,v) &= (1,a,0) + u(1,2,0) + v(-2,0,b)
\end{aligned}$$

▲

■ 3.) Es sei $\vec{a} = (2,3,-1)$ und $\vec{b} = (1,0,7)$. Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt wird.

a) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K = (4,9,-15)$ auf dieser Geraden?

b) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen Sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.

c) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

▼

$$\vec{x}_g(u) = (2,3,-1) + u(-1,-3,8) = (2-u, 3-3u, -1+8u)$$

a)

2-u=4	-u=2	Nein, unlösbar.
3-3u=9	-3u=6	Dagegen klappt es für
-1+8u=-15	+8u=-14	$\vec{a} = (2,3,+1)$

b) u=1 und u=2 widersprechen sich.

$$\vec{x}_E(a,b) = a\vec{a} + b\vec{b} = (2a-b, 3a-3b, -a+8b)$$

c) z=0.Also a=8b. D.h.:

$$\vec{x}_E(8b,b) = (15b, 21b, 0) = 3b(5,7,0)$$

▲

■ 4) Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1 = -2$ am Orte A und zur Zeit $t_2 = 5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A = (-3,5,7)$ und $\vec{r}_B = (0,-4,13)$.

a?)Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?

▼ Mit der Definition (der mittleren Geschw.) folgt:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{t_2 - t_1} = \frac{3}{7}(1,-3,2) \qquad ▲$$

b?) Angenommen, der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: Wo befindet er sich zur Zeit t=5?

▼ Für die Bahnkurve folgt aus den Daten (Beachte: $\vec{r}(-2) = \vec{r}_A$ ist verlangt! Das ging vielfach daneben!):

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_A + (t+2)\vec{v} = (-3,5,7) + \frac{3}{7}(1,-3,2)(t+2) \\ \text{Also } \vec{r}(5) &= (-3,5,7) + 3(1,-3,2) = \underline{(0,-4,13)} \end{aligned}$$

▲

c?) Wann schneidet er die x-y-Ebene (bei konstanter Geschwindigkeit)?

▼ Das Result aus b) gibt mit T=t+2:

$$\vec{r}(t) = \frac{(-21,35,49) + (3,-9,6)T}{7} = \frac{1}{7}(-21+3T, 35-9T, 49+6T)$$

Für $T_s = -\frac{49}{6}$ gilt z=0. Es folgt für die gefragte Zeit $\underline{t_S = -\frac{61}{6}}$. (Mehr war nicht gefragt!)

■ 5) In einigen Eckpunkten eines Würfels werden Massen angebracht. In den 4 Eckpunkten des oberen Deckels je eine Masse m und in einem der unteren Eckpunkt eine Masse M. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieses Systems.

▼ Wir legen den Ursprung in den Eckpunkt, der die Masse M enthält. Dann folgt für den Schwerpunkt, wenn a die Kantenlänge des Würfels ist:

$$\vec{x}_S = \frac{ma(2,2,4)}{4m+M} = \frac{2ma}{4m+M}(1,1,2)$$

▲

■ 6.) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(2) = (0,0,0)$ und $\vec{v}^K(2) = (5,5,10)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0,0,-10)$. Wie lautet die Formel für die Flugparabel? (Geometrische und Tupelform!) Wie die vektorielle Geschwindigkeit?

▼ Die beiden immer verlangten Angaben:

$$\boxed{\vec{r}^K(t) = (5,5,10)T + \tfrac{1}{2}(0,0,-10)T^2 = (5T, 5T, 10T-5T^2)}$$

$$\boxed{\vec{v}^K(t) = (5,5,10-10T) \quad \text{wobei } T = t-2 \text{ gesetzt ist.}}$$

▼

a?) $\vec{r}^K(0) = ...?$ $\vec{r}^K(-2) = ...?$ $\vec{v}^K(-2) = ...?$ $\vec{r}^K(3) = ..?$ ▼

$$\begin{aligned} \vec{r}^K(0) &= (-10,-10,-40) \qquad \vec{r}^K(-2) = (-40,-40,-120) \\ \vec{v}^K(-2) &= (5,5,50) \;\; ...... \end{aligned}$$

▲

b?)Wo liegt der Scheitelpunkt?

▼ Es muß $v_3 = 0$ gelten. Also 10-10T=0. Es folgt T_S=1 oder $t_S = 3$. Das gibt für den Ort des Scheitels

$$\vec{r}(t_S) = (5,5,5)$$

▲

c?) Wann und wo wird die Ebene z=2 getroffen?

▼ Für die zugehörigen Zeitpunkte folgt die Bedingung 10T-5T^2 = 2. Also

$$T_z = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{t}_z = 3 \pm \frac{1}{5}\sqrt{15}.$$

Einsetzen gibt für die beiden Orte (z=2 ohne zusätzliche Rechnung!):

$$\vec{r}(t_z) = (5 \pm \sqrt{15}, 5 \pm \sqrt{15}, 2)$$

▲

■ 7.) Bestimmen Sie unter Verwendung des Schnittschemas den Schnitt der Geraden g mit der Ebene E sowie den Schnitt der Ebenen E und F. Dabei sei:

$$\begin{aligned} \vec{x}_g(\alpha) &= \alpha(1,2,3) \quad , \ \vec{x}_E(a,b) = (3,2,7) + a(1,1,0) + b((0,0,1) \\ \vec{x}_F(c,d) &= c(-1,1,0) + d(0,0,1). \end{aligned}$$

▼ Tupelform

$$\begin{aligned} \vec{x}_g(\alpha) &= (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \quad \vec{x}_E(a,b) = (3+a, 2+a, 7+b) \\ \vec{x}_F(c,d) &= (-c, c, d) \end{aligned}$$

g$\cap E$ gibt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = 3+a \\ 2\alpha = 2+a \\ 3\alpha = 7+b \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ a = -4 \\ b = -10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vec{x}_S = (-1,-2,-3) \\ \hline \text{Schnittpunkt!} \end{array}$$

E$\cap F$ gibt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{3+a=-c} \\ \text{2+a=c} \\ \text{7+b=d} \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \text{b frei} \\ \text{d=7+b} \\ \text{c=-}\frac{1}{2} \\ \text{a=-}\frac{5}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vec{x}_E(-\frac{5}{2}, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 7+b\right) \\ \vec{x}_F(-\frac{1}{2}, 7+b) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 7+b) \\ =\frac{1}{2}\text{(1,-1,14)+b(0,0,1)} \\ \hline \text{Schnittgerade} \end{array}$$

■ 8.) Ein dicker Ring aus Eisen wird erhitzt. Vergrößert oder verkleinert sich dabei der innere Radius? Welcher Bezug besteht zur Vektorrechnung? Skizzieren sie den Sachverhalt eventuell an Hand einiger einfacher Figuren.

▼ Beim Erwärmen ändern sich die Abstände aller Massepunkt um denselben Faktor. Die Vektorrechnung sichert zunächst, dass alle Ursprungsabstände unter Beibehaltung der Richtung um denselben Faktor α verändert werden, wenn man $\vec{x}$ durch $\alpha\vec{x}$ ersetzt. Was liefert das für den Abstand der Endpunkte? Wegen $\alpha\vec{x} - \alpha\vec{y} = \alpha(\vec{x} - \vec{y})$ bewirkt das automatisch, dass sich dann auch der Abstande dieser Punkte unter Beibehaltung der Richtung um den selben Faktor verändert. D.h. $\vec{x} \mapsto \alpha\vec{x}$ beschreibt gerade die beim Erwärmen auftretende Abstandsänderung. Beim Eisenring vergrößert sich somit auch der innere Radius um den Faktor α.

■ 9.) Parametrisieren sie alle Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt P$\in E^3$ gehen. Das ist mit 3 Parametern leicht, sollte aber auch mit zweien gehen. Was für ein Problem tritt auf?

▼ Man wählt die Koordinaten eines beleibigen zweiten Punktes $\neq P$ als freie Parameter und arbeitet mit der Zweipunkteformel. Sei $\vec{x}_P^K = (x_p, y_P, z_P)$, dann sei

$$\vec{x}_{xyz}^K(\alpha) = (x_P, y_P, z_P) + \alpha(x - x_P, y - y_P, z - z_P).$$

Für jedes x$\neq x_P, y \neq x_P$ und z$\neq y_P$ ergibdas eine der gesuchten Geraden. Allerdings erält man alle Geraden mehrfach. Das läßt sich vermeiden, wenn man Polarkoordinaten verwendet und mit den Polarwinkeln θ und φ arbeitet. Aber dann ergeben immer noch zwei Richtungen dieselbe Gerade. Die durch θ und φ festgelegte und die entgegengesetzte Richtung, die zu den Winkeln $\pi - \theta$ und $\varphi + \pi$ gehört.

▲

■ 10.) Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates-dann Lösung.)

Die Vertikalrichtung sei $\vec{e}_3$. Die Horizontalebene sei die 1-2-Ebene. Die Laternespitze habe den Ort $L\vec{e}_3$.

▼ Der Fußpunkt des Menschen bewege sich gemäß $\vec{F}(t) = \vec{a}+\vec{v}t$ und der Kopf mit $\vec{K}(t) = \vec{a}+H\vec{e}_3+\vec{v}t$. H ist die Höhe des Menschen und L>H die der Laterne.

Die Verbindungsgerade Laternenspitze - Kopf hat folgende Parametrisierung

$$\vec{x}_g(\alpha) = L\vec{e}_3 + \alpha(\vec{a} + H\vec{e}_3 + \vec{v}t - L\vec{e}_3) = \vec{e}_3(L + \alpha(H - L)) + \alpha\vec{a} + \alpha\vec{v}t$$

Hierbei ist t als äußerer Parameter anzusehen.

Weder $\vec{a}$ noch $\vec{v}$ haben eine Komponente in 3-Richtung. Daher liegt der Schnitt mit der Horizontalebene bei $\alpha_S = \frac{L}{L-H}$. Einsetzen ergibt nach etwas Umrechnung für die Bahn des Schattens des Kopfes:

$$\vec{x}_g(\alpha_S) = L\vec{e}_3 + \frac{L}{L-H}(\vec{a} + t\vec{v} + (H - L)\vec{e}_3) = ... = \frac{L}{L-H}(\vec{a} + \vec{v}t).$$

Das ist die Bahn des Fußes mit einem Skalenfaktor $\frac{L}{L-H}$.

■11.) Wir betrachten die kubische Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

a) Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichuing für x ein. Bestimmen Sie α so, daß sie die entstehende Gleichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

b) Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3 + v^3) + (u+v)(3uv+p) + q = 0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und u$^3 + v^3 + q = 0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt 27u$^3v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt v$^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Erneut folgt eine Lösung (der drei möglichen) Lösungen. (Zweite Methode.)

1. ▼ Erste Methode. x=$\frac{a}{y} - y$. Daher ist x$^3 = -y^3 + 3ay - 3a^2y^{-1} + \frac{a^3}{y^3}$. Einsetzen in die Bedingungsgleichung gibt

$$\begin{array}{ll} \mathrm{x}^3: & -y^3 + 3ay - 3a^2y^{-1} + \frac{a^3}{y^3} \\ \mathrm{px} & \qquad -py + pay^{-1} \\ \mathrm{x}^3 + px + q: & \boxed{-y^3 + (3a - p)\,y + (-3a + p)\frac{a}{y} + \frac{a}{y^3} + q} \end{array}$$

Für a=$\frac{p}{3}$ verschwinden zwei Summanden (statt des erwarteten einen). Man erhält für diesen a-Wert eine bikubische Gleichung für y:

$$y^3 - q - \frac{a^3}{y^3} = 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{\text{y}^6\text{-qy}^3\text{-a}^3\text{=0}} \quad \text{Also } \mathrm{y}^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{y^3} &= \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3}{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^3 \left[+\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]}{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Beide Vorzeichenkombinationen ergeben dasselbe.

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt[3]{y^3}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{y^3}} = -\sqrt[3]{-y^3}+\sqrt[3]{\frac{a^3}{y^3}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

Damit ist eine Formel für eine der drei jeweils vorhandenen Lösungen bestimmt.▲

■ 13) Zeigen (=beweisen) Sie, daß der Schwerpunkt von drei (nicht auf einer Linie liegenden) Massenpunkten in der von den drei Punkten erzeugten Ebene liegt.

▼ Die Schwerpunktsformel (für drei Punkte) läßt sich wie folgt umschreiben. Dabei werden ausschließlich durch die Vektoraumaxiome gerechtfertigte Umformungen benutzt:

$$\begin{aligned} \vec{x}_S &= \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+m_3\vec{x}_3) \\ &= \frac{m_1+m_2+m_3}{M}\vec{x}_1+\frac{m_2}{M}(\vec{x}_2-\vec{x}_1)+\frac{m_3}{M}(\vec{x}_3-\vec{x}_1) \\ &= \vec{x}_1+\frac{m_2}{M}(\vec{x}_2-\vec{x}_1)+\frac{m_3}{M}(\vec{x}_3-\vec{x}_1) \end{aligned}$$

und das heißt, dass $\vec{x}_S$ in der von den drei Punkten aufgespannten Ebene liegt. Für $\mathrm{m}_1, m_2, m_3 > 0$ und die Punkte nicht auf einer Geraden, liegt er sogar im Innern des von den drei Punkten aufgespannten Dreiecks. ▲

■ 14) Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem nach $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ auf. Welche inhaltliche Interpretation ist naheliegend?

$$\begin{aligned} M\vec{x}_S &= m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2 \\ \vec{d} &= \vec{x}_2-\vec{x}_1 \end{aligned}$$

▼ Man führt in einem System aus zwei Massenpunkten mit Konfigurationsraum $\mathrm{V}_0^3 \times V_0^3$ zwei neu Koordinatenvektoren mit geometrischer Bedeitung ein: Den Ort des Schwerpunktes und den Abstand der beiden Punkte. Dabei ist M als $\mathrm{m}_1 + m_2$ zu interpretieren. Rechnerisch erhält man, wobei alles erneut durch die Axiome gerechtfertigt wird:

+	$M\vec{x}_S = m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2$	$\mathrm{M}\vec{x}_S + m_1\vec{d} = (m_1+m_2)\vec{x}_2$	
$+\mathrm{m}_1 \cdot ..$	$\vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$	$\boxed{\vec{x}_2 = \vec{x}_S + \frac{m_1}{M}\vec{d}}$	
analog:		$\boxed{\vec{x}_1 = \vec{x}_S - \frac{m_2}{M}\vec{d}}$	

Wählt man den Ursprung in S, so erhält man erneut das Hebelgesetz. ▲

15) ■ Ein Fluß der Breite B fließe (idealisiert) mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{W}^K = (W,0)$. In dem Fluß fährt ein Motorboot mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}^K = (v_x, v_y)$ **relativ zum Wasser.** Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes relativ zum Ufer? Wie ist die Bootsgeschwindigkeit $\vec{v}$ anzusetzen, damit das Boot bei der Ankunft am entgegengesetzten Ufer um die Strecke A abgetrieben wird.

▼ Die gesuchte Relativgeschwindigkeit ist

$$\boxed{\vec{v}_U^K = \vec{v}^K + \vec{W}^K = (\mathrm{W}+\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y).}$$

Wir legen den Ursprung in den Startpunkt am ersten Ufer. Startzeit $t_0 = 0$.Dann lautet die Bahnkurve des Bootes $\vec{r}^K(t) = t\vec{v}_U^K = t(W+v_x, v_y)$. Der Fluss ist zum Zeitpunkt T überquert, der $v_y T = B$ erfüllt. Also T=$\frac{B}{v_y}$. Dann hat man in der Abtriebsrichtung die Bedingung A=T(W+v_x) $= \frac{B}{v_y}(W+v_x)$. Gefragt war nach v_x und v_y. Wir dürfen etwa v_x frei wählen und erhalten dann

$$\boxed{v_y = \frac{B}{A}(W + v_x) \qquad \text{und} \;\; v_x \text{ frei}}.$$

Realistischer ist es, die Bootsgeschwindigkeit v=$\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ festzulegen und den Startwinkel des Bootes gegenüber der Uferlinie zu variieren. Dazu formen wir die letzte Gleichung wie folgt um

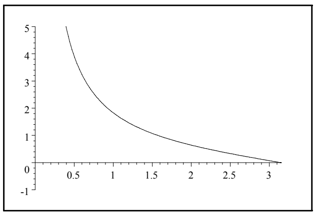
$$\frac{A}{B} = \frac{W + v_x}{v_y} = \frac{1 + \frac{v_x}{W}}{\frac{v_y}{W}}.$$

Jetzt führen wir systembeogene Größen ein, nämlich Q=$\frac{A}{B}$ und $\beta_x = \frac{v_x}{W} = r\cos\theta$ und $\beta_y = \frac{v_y}{W} = r\sin\theta$ mit r=$\frac{v}{W}$ Dann mißt Q die Größe des Abtriebs in Einheiten der Flußbreite und $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ gibt die Bootsgeschwindigkeit in Einheiten der Flußgeschwindigkeit W. Unsere Bedingung schreibt sich

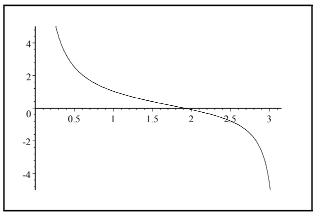
$$Q = \frac{1 + r\cos\theta}{r\sin\theta}$$

Das gibt uns die Stärke des Abtriebs Q=$\frac{A}{B}$ bei gegebenem v=rW und θ. Gibt man v vor, dann zeigt diese Formel , welche Punkte des gegenüberliegenden Ufers man durch geeignete Wahl von θ überhaupt noch erreicht.

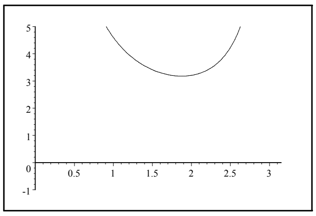
Das nachfolgende Bild liefert die Verhältnisse für die drei Fälle r=1 (Boot und Fluss gleich schnell), r=3 (schnelles Boot) und r=0.3 (langsames Boot). Horizontal ist der Startwinkel aufgetragen, der stets von 0 bis π geht. $\theta = 0$ bedeutet: Boot fährt parallel zum Fluß. Bei $\theta = \frac{\pi}{2}$ fährt es senkrecht zur Strömung und bei $\theta = \pi$ entgegengesetzt.



r=1. Oder v=W. Fährt das entgegen der Flußströmung erreicht es das gegengestzte Ufer ohne Abtrieb nach sehr langer Zeit,



r=3. Das schnelle Boot erreicht alle Stellen des gegenüberliegenden Ufers,



r=0.3. Das langsame Boot hat einen Abtrieb, der stets über einem Minimalwert von etwa Q=3 liegt. Alle größeren Werte erreicht man über **zweiv** Startwerte!