Vorkurs 2003

Übungen zu den linearen Gleichungen

Zunächst **Vermutungen zu k und ℓ aufstellen.**
Lösung bestimmen, möglichst geometrische Endform herstellen.
Tatsächliches k und ℓ mit vermuteten Werten vergleichen.
Sind eventuelle Fallunterscheidungen vollständig?

■ 1.) a) 1 Minute b) Zunächst die Brüche beseitigen! c) a äußerer Parameter.

$$\text{a)}\ \boxed{\begin{array}{l} 3x+7y=4 \\ 2x-\ y\ =1 \end{array}} \qquad \text{b)}\ \boxed{\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{7}=\frac{1}{3} \\ \frac{x}{2}\ -\ y\ =\ 1 \end{array}} \qquad \text{c)}\ \boxed{\begin{array}{l} 3x+7y=4 \\ 2x-\ y\ =1 \\ \hline 2x+8y=a \end{array}}$$

▼ a) $\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}}$ b) $\boxed{\vec{x}_L = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 20 \\ -7 \end{pmatrix}}$

Zu c)

$\begin{array}{l} 3x+7y=4 \\ 2x-\ y\ =1 \\ \hline 2x+8y=a \end{array}$	17x=11 18x=8-a	Fall i) $a=-\frac{62}{17}$ $\vec{x}_L = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$	Fall ii) $a \neq -\frac{62}{17}$ unlösbar.

▲

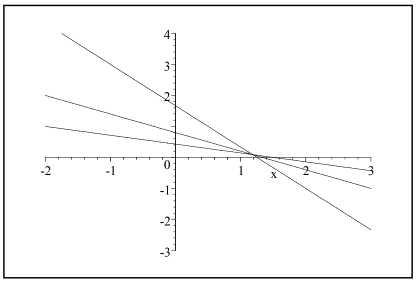
■ 1d) Schreiben Sie nachfolgende 4 Gleichungen zunächst in **Matrixform**. Vergleichen Sie die Gleichungssysteme und skizzieren Sie deren Lösungsmenge in $\mathbb{R}^2$.

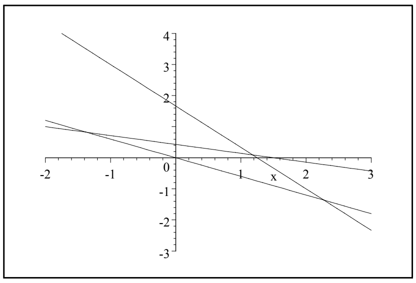
$$\boxed{2x+7y=3} \qquad \boxed{\begin{array}{l} 2x+7y=3 \\ 4x+3y=5 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} 2x+7y=3 \\ 4x+3y=5 \\ \hline 3x+5y=4 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} 2x+7y=3 \\ 4x+3y=5 \\ \hline 3x+5y=0 \end{array}}$$

▼ $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3}$ $\quad \vec{x}_L(y) = (\frac{3}{2}-\frac{7}{2}y, y) = (\frac{3}{2},0)+y(-\frac{7}{2},1)$ k=1

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}$ $\quad \vec{x}_L = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ k=0.

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}$ $\quad \ell = 2$, da (1)+(2)=2(3) gilt. Daher **dieselbe** Lösung wie die vorausgegangene Gleichung. Interpretierbar als gemeinsamer Schnittpunkt von drei Geraden. Linkes Bild. Im rechten Bild sind die Geraden des vierten Systems. Das System ist unlösbar





▲

■ 2) Überprüfen Sie an nachfolgenden Beispielen die Regel *Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung = spezielle Lösung der inhomogenen + allgemeine Lösung der homogenen.* Denken Sie an k und ℓ. Probe machen (geeignet!)

-x+2y+z-3w=7	$x+y+z+w=3$ $2x-y+3z-2w=-1$	$x+y=1$ $y+z=2$ $z-x=3$

▼ $\boxed{\text{-x+2y+z-3w=7}}$ $\ell=1$, k=3.

$$\vec{x}_L(y,z,w)=\begin{pmatrix}-7+2y+z-3w\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Der erste Vektor erfüllt die inhomogene, die restlichen drei die homogene Gleichung!

$\boxed{\begin{array}{l}x+y+z+w=3\\ 2x-y+3z-2w=-1\end{array}}$ $\vec{x}_L(z,w)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2-4z+w\\ 7+z-4w\\ z\\ w\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\7\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{z}{3}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\\0\end{pmatrix}+\frac{w}{3}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\3\end{pmatrix}$

Der Aufpunktvektor (einschließlich $\frac{1}{3}$) löst die inhomogene Gleichung. Die Richtungsvektoren lösen die homogene.

$\boxed{\begin{array}{l}x+y=1\\ y+z=2\\ z-x=3\end{array}}$ Bilde (2)-(1) zeigt System unlösbar! Und es ist $\ell=2$.

▲

■ 3) Einige besondere Systemformen. D.h. man kann immer einen naheliegenden günstigen Weg zur Lösung finden.

x-2y+z/3+7w=1 y/3+7z-3w=2 z+w=0 2w=4	y/3+7z-3w=2 z+w=0 x-2y+z/3+7w=1 x+w=2	x+y=1 y+z=2 z+w=3 w+x=a

▼ $\boxed{\begin{array}{l}\text{x-2y+z/3+7w=1}\\ \text{y/3+7z-3w=2}\\ \text{z+w=0}\\ \text{2w=4}\end{array}}$ Hier ist das Ende des Eliminationsprozesses bereits verfügbar. Man erhält nacheinander w=2, z=-2, y=3(2-7z+3w)=66 x=$\frac{359}{3}$. Erwartungsgemäß ist hier $\ell=4$ und k=0.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{y/3+7z-3w=2}\\ \text{z+w=0}\\ \text{x-2y+z/3+7w=1}\\ \text{x+w=2}\end{array}}$ Hier wird man sofort x und z eliminieren: $\boxed{\begin{array}{l}\frac{1}{3}y-10w=2\\ -2y+\frac{17}{3}w=-1\end{array}}$

.Ergebnis $\vec{x}_L=\frac{1}{163}\begin{pmatrix}359\\-12\\33\\-33\end{pmatrix}$

a äußerer Parameter.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{x+y=1}\\ \text{y+z=2}\\ \text{z+w=3}\\ \text{w+x=a}\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{x+y=1}\\ \text{-y+w=1}\\ \text{w+x=a}\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{x+y=1}\\ \text{x+y=a-1}\end{array}}$ Also : **Unlösbar** für a$\neq$ 2 und für a=2 ist $\vec{x}_L(x)=\begin{pmatrix}x\\1-x\\2-x\\1+x\end{pmatrix}$

Verzweigung ! ▲

■ 4) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in α, β, γ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler. Rechnen Sie!

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}}\ .$$

▼

$$\begin{array}{r} \alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4} \\ \alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2} \\ \alpha + 6\beta + 36\gamma = A \end{array}$$

Zunächst α, dann β raus. Und dann Rückeinsetzen. Ergebnis

$$\vec{x}_L = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -48A^{-4} + 120A^{-2} + 8A \\ -16A^{-4} + 10A^{-2} + 6A \\ 4A^{-4} - 5A^{-2} + A \end{pmatrix}$$

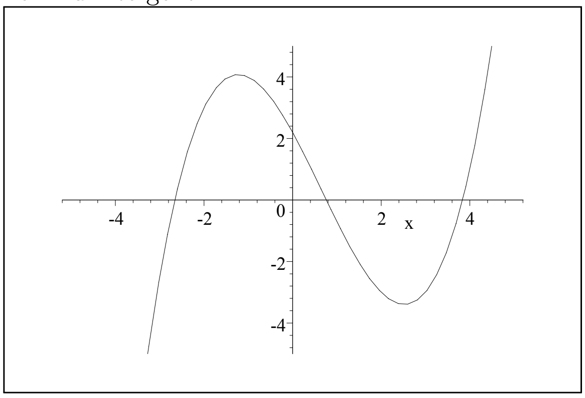
▲

■ 6) Von einem Polynom p(x)=$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ wisse man, dass p(-1)=4, p(-2)=3, p(2)=-3 und p(3)=-3 gilt. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 auf und lösen Sie dieses.

▼ Das Gleichungssystem (4 Gleichungen für 4 Unbestimmte!)

$$\begin{array}{r} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 4 \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -3 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -3 \end{array} \qquad \vec{x}_L = \tfrac{1}{60}\begin{pmatrix} 132 \\ -158 \\ -33 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Das ergibt das Polynom p(x)=$\frac{1}{60}\left(132 - 158x - 33x^2 + 17x^3\right)$ mit dem folgenden Graphen, der offensichtlich durch die vorgegebenen Punkte geht:



▲

■ 7) Schnitt zweier Ebenen im $\mathbb{R}^4$. Wir starten mit zwei Parametrisierungen (etwa 3 min):

$$\begin{array}{rcl} \vec{x}_E(a,b) & = & (2+3a, a+b, -b, 1+a) \\ \vec{x}_F(c,d) & = & (2+c, d, 1, -c-2d) \end{array}$$

▼Das zugehörige Gleichungssystem:

$\boxed{\begin{array}{l} 2+3a=2+c \\ a+b=d \\ -b=1 \\ 1+a=-c-2d \end{array}}$ gibt sofort b=-1 und $\begin{array}{l} 3a=c \\ a-1=d \\ 1+a=-c-2d \end{array}$ $\begin{array}{l} a-1=d \\ 1+4a=-2d \end{array}$ 6a=1 $\boxed{\vec{x}_L = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}}$

Das gibt den Schnitt**punkt** $\vec{x}_S = \vec{x}_E(\frac{1}{6}, -1) = \vec{x}_F(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{6}, -1, \frac{7}{6}\right)$. Die beiden Ebenen ▲

■ 8) Machen Sie aus den folgenden 3 Gleichungssystemen ein einziges mit **einem** äußeren Parameter, lösen Sie dieses und bestimmen Sie so die Lösungen der vier Systeme.

$$\boxed{\begin{array}{l}2x+3y=4\\3x+6y=5\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{l}2x+3y=6\\4x+6y=5\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{l}2x+3y=2\\2x+6y=5\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{l}2x+3y=-2\\+3y=5\end{array}}$$

▼ Mit etwas Probieren findet man das System, das für a=2,3,1 und -1 die 4 Systeme gibt:

$$\boxed{\begin{array}{l}2x+3y=2a\\(a+1)x+6y=5\end{array}}\begin{array}{l}-2\\1\end{array}$$

Wir eliminieren y.

$$(a-3)x = 5-4a$$

Für a=3 ist es **unlösbar** (0x=-7). Das ist gerade das zweite der Systeme. Für a≠ 3 dagegen folgt

$$\boxed{x=\frac{5-4a}{a-3}\qquad y=\frac{2}{3}\,\frac{a-5+a^2}{a-3}}$$

Werte für a einsetzen gibt die gesuchten Lösungen. Für a=2 etwa wird x=3 und y=-$\frac{2}{3}$. ▲

■ 9) Gleichungen mit äußerem Parameter

$$\boxed{\begin{array}{l}ax+3y-5z=1\\x+y-z=a\end{array}}\boxed{\begin{array}{l}ax+2z=2\\5x+2y=1\\x-2y+bz=3\end{array}}\boxed{\begin{array}{l}4x+y-az+w=2\\x-y+2w=3\\ay+w=4\end{array}}$$

▼ Im ersten System zuerst y raus. Dann x frei. Das gibt

$$\boxed{\begin{array}{l}ax+3y-5z=1\\x+y-z=a\end{array}}\begin{array}{l}+1\\-3\end{array}\qquad\boxed{(a-3)x-2z=1-3a}\qquad \vec{x}_L(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x\\(5a-1)+x(a-5)\\(3a-1)+x(a-3)\end{pmatrix}$$

Eine Fallunterscheidung ist hier nicht erforderlich!

Im nächsten System erneut zuerst y raus. Im nächsten Schritt läßt sich eine Verzweigung nicht mehr vermeiden. Wir eliminieren x.

$$\boxed{\begin{array}{l}ax+2z=2\\5x+2y=1\\x-2y+bz=3\end{array}}\quad\begin{array}{l}ax+2z=2\\6x+bz=4\end{array}\quad (ab-12)\,z=4a-12$$

Typischer Fall: ab≠ 12. Dann folgt $\boxed{z=\frac{4a-12}{ab-12}}$ und dann $\boxed{x=\frac{2b-8}{ab-12}}$ und $\boxed{y=\frac{ab-10b+28}{ab-12}}$

Nun der Sonderfall ab=12. Hierfür lautet die letzte Bedingung $\boxed{0z=4a-12}$. Eine weitere Fallunterscheidung ist nötig: Ist a≠ 3, dann ist das System unlösbar.

Ist a=3 und natürlich ab=12, also b=4, dann ist z frei. Das Rückeinstzen gibt x=$\frac{2}{3}(1-z)$ und schließlich y=$\frac{1}{3}(10z-7)$.

Zuerst x raus, dann w. Dann y frei wählen. Dann folgt für a≠ 0

$$\boxed{\begin{array}{l}4x+y-az+w=2\\x-y+2w=3\\ay+w=4\end{array}}\quad\begin{array}{l}5y-az-7w=-10\\ay+w=4\end{array}\quad\boxed{(5+7a)y-az=18}\quad \vec{x}_L(y)=\begin{pmatrix}y+2ay-5\\y\\\frac{5y+7ay-18}{a}\\-ay+4\end{pmatrix}$$

Für a=0 lautet die letzte Gleichung dagegen $\boxed{5y=18.}$ Also <u>z frei</u> und <u>y=$\frac{18}{5}$</u> und <u>w=4</u> und x=-$\frac{7}{5}$. Erneut

verzweigt k mit a. ▲

■ 10.) Aufzulösende Vektorgleichungen. Dabei sei $\vec{d}$ bekannt.

$$\boxed{\begin{array}{l}2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\vec{d}\\\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}=-\vec{d}\end{array}}$$

▼ Zuerst die Brüche beseitigen

$$\boxed{\begin{array}{l} 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{d} \\ \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = -\vec{d} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} 16\vec{a} + 4\vec{b} = 8\vec{d} \\ \vec{a} + 4\vec{b} = -2\vec{d} \end{array}} \quad 15\vec{a} = 10\vec{d} \quad \begin{array}{l} \vec{a} = \frac{2}{3}\vec{d} \\ \vec{d} = -\frac{2}{3}\vec{d} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{d} \\ 3\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{0} \end{array}} \quad 2\vec{x} + \vec{y} = -\vec{d} \quad \begin{array}{l} \vec{x} \text{ frei} \\ \vec{y} = -2\vec{x} - \vec{d} \\ \text{-}\vec{x} + 2\vec{d} \end{array}$$

▲

■ 11.) Wieso wird durch die erste Gleichung keine, durch die zweite wohl aber eine lineare Gleichung (=lineares Gleichungssystem) beschrieben?

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

▼

In der Matrix darf keine der Unbestimmten stehen! Höchstens äußere Parameter. Die zweite Gleichung des ersten Systems lautet $\boxed{\text{-5x+4y}^2 = 2}$. Das ist nicht linear!

▲

■ 13) Einige weitere Beispiele

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{2x+2y-z+t=4} \\ \text{4x+3y-z+2t=6} \\ \text{8x+5y-3z+4t=6} \\ \text{8x+5y-3z+4t=12} \\ \text{3x+3y-2z+2t=6} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} 2x + ay = 3 \\ (a-3)x + 3y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \end{array}}$$

a äußerer Parameter

▼ Die dritte und vierte Gleichung des ersten Systems widersprechen sich! Also unlösbar!
Im zweiten System eliminieren wir y:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + ay = 3 \\ (a-3)x + 3y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \end{array}} \begin{array}{ll} \text{-3} & \\ \text{a} & 5 \\ & \text{-3} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{a}^2 - 3a - 6)x = 5a - 9 \\ \text{(5a-24)x=13} \end{array} \qquad a$$

Das verbliebene System ist unlösbar, sofern a nicht ganz bestimmte Bedingungen erfüllt. Die Verträglichkeitsbedingung lautet (ohne Division!!)

$$\begin{aligned} (5a-9)(5a-24) &= 13(a^2 - 3a - 6) \\ 12a^2 - 126a + 294 &= 0 \\ & \boxed{\text{a}_1 = \tfrac{7}{2} \qquad \text{a}_2 = 7} \end{aligned}$$

Wir sehen: für diese beiden Ausnahmewerte ist das System lösbar, sonst ist es unlösbar. Für a=7 lautet das System.

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + 7y = 3 \\ 4x + 3y = 5 \\ 3x + 5y = 4 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{Inspektion: Offensichtlich} \\ \text{(1)+(2)=2(3).} \quad \text{Also } \ell = 2. \end{array} \quad \vec{x}_L = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt der Fall a=$\frac{7}{2}$. Damit folgt

$$\boxed{\begin{array}{lll} 4x + 7y = 6 & 1 & \\ 1x + 6y = 10 & \text{-4} & 3 \\ 3x + 5y = 4 & & \text{-1} \end{array}}$$

-17y=-34
17y=34

y=2 und x=-2

Auch hier ist daher $\ell = 2$. Die Eliminationsmethode zeigt das unmittelbar. ▲