Höhere Mathematik für Physiker III

Nr.1

Aufgaben 1a-c) 3) und 4) als **Hausaufgaben**.

■ 1) K=$\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{g} = (0, 0, -10)$ und $\quad L(t,\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{v}^2 + (\vec{g} \cdot \vec{x})$

a) Bestimmen Sie die Flugparabel $\vec{r}$:[0,T]$\rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $\vec{r}(0) = \vec{0}$ und $\vec{r}(T) = \vec{a}$. Dabei sei T>0 und $\vec{a} \neq \vec{0}$. Geben Sie die zugehörige Liftkurve $\vec{r}_{\sim}$ an.

b) Bestimmen Sie drei weitere Kurven $\vec{x}_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, die dieselben Randbedingungen erfüllen. Geben Sie auch deren Liftkurven an.

c) Bestimmen Sie S$[\vec{r}] = \int_0^T dt L(t, \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ sowie S$[\vec{x}_i]$ und vergleichen Sie die Resultate. Führen Sie möglichst in $\vec{r}$ noch einen äußeren Parameter ein und variieren Sie diesen. Für welchen Wert erhält man ein Extremum von S?

d) Verallgemeinerung in der **Anwesenheitsübung**: Koordinatenfreie Rechnung.

■ 2) Wie kann man ein Wirkungsfunktional näherungsweise mit dem Computer berechnen? Wie sollte man vorgehen, um eine sinnvolle numerische Approximation des Funktionales, etwa für den Brachistochronenfall, zu erhalten? (Überlegen, Ausführung in der Anwesenheitsübung.)

■ 3) Bestimmen Sie das Funktional, d.h. die Lagrangefunktion, des **räumlichen** Brachistochronenproblems. (Hinweis: Wie wird man die Bahnform parametrisieren? Wähle $\vec{h}(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ mit 0$\leq \alpha \leq 1$. Die Bewegung wird festgelegt durch ([0,T],t$\mapsto \alpha(t), [0, 1]$). Über den Energiesatz folgt eine Bedingung für die Formfunktionen x,y,z). Wie lautet die Lagrangefunktion, wie die Euler-Lagrange-Gleichungen?

■ 4) Sei L$(t, x, v) = v^2(1 + tx^2)$ und K(t,x,v)=$\sqrt{\frac{1+v^2}{-x}}$ Lagrangefunktionen. sowie x(0)=0 und x(1)=a. N=1.Sie wollen für diese beiden Funktionen die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen nachvollziehen. Begründen Sie im ersten Fall die offensichtliche Zulässigkeit der Schritte einschließlich der Restermeigenschaft. Geben Sie für L Entwicklung von S[g+$\alpha\eta$] nach Potenzen von α an. Welche mathematischen Probleme treten dagegen im zweiten Fall K auf? Wo ist die erste problematische Stelle?