Übungen Höhere Mathematik für Physiker

Nr.1 17. Oktober 2002

Mit ausgewählten Lösungen

1. (H) Mengenbildung: Es sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen und k$\in \mathbb{N}$ mit k≥ 2. Definiere $\mathcal{T}_k = \{(p,q)|p,q \in \mathcal{P}$ und $p-q=k\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{T}_3$ und $\mathcal{T}_5$ und $\mathcal{T}_7$ sowie die ersten Elemente von $\mathcal{T}_4$. (Kommentar zum Resultat?)
▲ Bis auf p=2 sind alle Primzahlen ungerade. Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist stets gerade, nie gleich 3, 5, oder 7. Da 2 auch die kleinste Primzahl ist, hat man nur den Fall p-2=k zu untersuchen. Es folgt:
$$\mathcal{T}_3 = \{(5,2)\} \qquad \mathcal{T}_5 = \{(7,2)\} \qquad \text{und} \quad \mathcal{T}_5 = \emptyset \ \text{ (da 9 keine Primzahl)}$$
Dagegen erhält man für gerades k mehr Elemente, für k=4 z.B.
$$\mathcal{T}_4 = \{(7,3),(11,7),(17,13),....\}.$$

★

2. (H) Beweise: Sei p Primzahl. Dann ist $\sqrt{p}$ irrational.
▲ Der Beweis der Vorlesung für p=2 konnte ausgedehnt werden. Vielfach wurde von Ihnen folgender Beweis benutzt:
Angenommen $\sqrt{p}$ ist rational. Dann hätte man eine Darstellung $\sqrt{p} = \frac{n}{m}$ mit n,m$\in \mathbb{N}$ und n$\neq 0$. [[Die Angabe n,m$\in \mathbb{N}$ dürfen Sie nicht auslassen!!]] Also p$m^2 = n^2$. Beide Seiten lassen sich eindeutig in Primfaktoren zerlegen (da jeweils Elemente >1 aus $\mathbb{N}$ vorliegen!! Begründung?). Links erhält man eine ungerade, rechts eine gerade Anzahl von Primfaktoren. (Es gilt ja: Ist r=$p_1 p_2 ... p_k$ die Primzahlzerlegung von r, dann ist $p_1^2 p_2^2 ... p_k^2$ die von r^2). [[Natürlich können m und n unterschiedliche Anzahlen von Primfaktoren haben. Häufig formulieren Sie so, als seien beide Anzahlen gleich.]]

★

3. (H) Eine Aufgabe aus der **Arithmetik**: Sei $S_k(n) = 1^k + 2^k + ... + n^k$. (Bezeichnung!) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
▲ Vielfach unzulängliche Formulierungen!! Betrachten wir den Fall k=1:
Beweis: Für n=1 gilt $S_1(1) = 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2$. D.h. die Behauptung ist für n=1 korrekt. Nun sei die Behauptung bereits bis n bewiesen. D.h. insbesondere gilt $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Definitionsgemäß ist
$$S_1(n+1) = 1 + ... + n + (n+1) = S_1(n) + (n+1).$$
Ersetzt man hierein $S_1(n)$ durch $\frac{1}{2}n(n+1)$, so folgt die gesuchte Gleichung
$$S_1(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

★

4. (H) Berechnen Sie (mit vollständiger Induktion):
$$J_n = \int_0^\pi dx \sin^{2n+1} x \qquad \text{für n=0,1,2,...}$$
Hierbei ist (über Schritt 2, Berechnung der ersten Fälle) das Ergebnis zunächst zu raten und dann induktiv zu verifizieren!
▲ Man findet durch direkte Integration $\boxed{J_0 = -\cos x|_0^\pi = 2}$ .Danach findet man durch partielle Integration eine Rekursionsformel
$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int_0^\pi dx \sin^{2n+3} x = \int_0^\pi dx \sin x \sin^{2n+2} x \\ &= \left[-\cos x \sin^{2n+2} x\right]_0^\pi - (2n+2)\int_0^\pi dx(-\cos x)\cos x \sin^{2n+1} x \\ &= (2n+2)\int_0^\pi dx \cos^2 x \sin^{2n+1} x = (2n+2)\int_0^\pi dx (1-\sin^2 x)\sin^{2n+1} x \\ &= (2n+2)(J_n - J_{n+1}) \ . \qquad \text{Also} \quad \boxed{J_{n+1} = \tfrac{2n+2}{2n+3} J_n} .f\ddot{u}rn = 2,3,... \end{aligned}$$

Damit erhält man die nächsten Integrale zu

$$J_1 = \frac{2}{3}2 \qquad J_2 = \frac{4}{5}\frac{2}{3}2 \qquad J_3 = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3}2 \qquad \text{Vermutung: } \boxed{J_n = 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}.$$

Das ist für die ersten n sicher korrekt und

$$J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}J_n = \frac{2n+2}{2n+3}\cdot 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}$$

gibt den Induktionsschluss.

★

5. (H) Sei $\mathfrak{G}$ die Menge aller Geraden der Ebene $\mathbb{R}^2_K$ und E der Ursprungskreis mit Radius R=1. Bestimmen Sie die Teilmenge $\mathfrak{G}_E$ aller Geraden, die E nicht treffen.

a) Weisen Sie nach: g sei Gerade, die durch die Gleichung y=mx+n beschrieben wird. Dann gilt:

$$(g \in \mathfrak{G}_E) \Longleftrightarrow (n^2 - m^2 > 1).$$

b) g werde durch y=$\frac{3}{2}$x+3 beschrieben. Dann gilt $g \in \mathfrak{G}_E$, da... (Nachweis)
c) Die Gerade g_n werde durch die Gleichung y=3x+n beschrieben. Es gilt $g \in \mathfrak{G}_E$. D.h. .... (Explikation)
d) Bestimmen Sie alle Geraden, die durch den Punkt (0,-3) gehen und die nicht in $\mathfrak{G}_E$ liegen.
e) Was passiert, wenn man in der Definition von $\mathfrak{G}$ nur *Kreis* schreibt statt *der Ursprungskreis* ?
▲ $\mathfrak{G}_E$ besteht aus allen Geraden, deren kürzester Abstand zum Ursprung (echt) größer als R ist. (Kreisdefinition!) Vektoriell sind das die Lösungsmengen der Gleichungen $\vec{n}\cdot\vec{x} = A$ mit A>1 und $|\vec{n}| = 1$. Wir können $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ ansetzen. (Vorkurs Kap. 6, (6.1.38-40), Thema Skalarprodukt. Das dort Gesagte überträgt sich auf die Ebene). Formal:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_E &= \{L|\exists A > 1 \text{ und } \vec{n} \in \mathbb{R}^2_K \text{ mit } |\vec{n}| = 1, \text{ so dass L Lösungsmenge von } \boxed{\vec{n}.\vec{x}=\text{A}}\} \\ &= \{L_{A,\alpha}|A,\alpha \in \mathbb{R}, A > 1, 0 \le \alpha < 2\pi, L_{A,\alpha} \text{ ist Lösungsmenge zu } \boxed{\text{x}\cos\alpha\text{+y}\sin\alpha\text{=A}}\} \end{aligned}$$

a) Achtung: Nicht **alle** Geraden lassen sich durch die Gleichung y=mx+n beschreiben. Es geht in dieser Teilaufgabe also um eine echte Teilmenge von $\mathfrak{G}_E$. Und es geht um **zwei zu beweisende Richtungen! (⇔)**
a1) Sei g durch y=mx+n beschreibbar und g$\in \mathfrak{G}_E$. Dann ist n$\neq$ 0. Es folgt

$$\frac{y}{n} - \frac{mx}{n} = 1 \qquad \boxed{\left(-\tfrac{m}{n}, \tfrac{1}{n}\right)\cdot\text{(x,y)=1}} \quad \text{und damit } \frac{1}{A} = \frac{m^2+1}{n^2}$$

für den kürzesten Abstand A. Oder A=$\frac{n^2}{m^2+1} > 1$. Es folgt $n^2 > m^2 + 1$ oder $\boxed{n^2 - m^2 > 1}$ wie behauptet.a2) Sei g durch y=mx+n beschreibbar und $\boxed{n^2 - m^2 > 1}$. Dann ist nach dem ersten Teil der kürzeste Abstand zum Ursprung gegeben durch A=$\frac{n^2}{m^2+1}$ Nun ist aber $n^2 > m^2 + 1$ und damit A=$\frac{n^2}{m^2+1} > 1$. Also wie verlangt g$\in \mathfrak{G}_E$
b) .....,da 9-$\frac{9}{4} = \frac{27}{4} > 1$ ist.
c) g$\in \mathfrak{G}_E$ und y=3x+n. D.h. $n^2 - 9 > 1$ oder $\boxed{n>\sqrt{10}}$.
d) Diese Geraden haben entweder eine Gleichung der Form y=mx-3 oder x=0. Letztere - die y-Achse - erfüllt die gestellte Bedingung, den Kreis zu treffen. Für die anderen muss nach a) gelten 9-$m^2 \le 1$. Oder $m^2 \ge 8$. Das ergibt insgesamt drei Fälle, die auf Geraden der gesuchten Art führen: 1) x=0 , 2) $m \le -\sqrt{8}$ und 3) $m \ge \sqrt{8}$.

★★★

Anlage zur Anwesenheitsübung:

■ Die Grundregeln (Axiome) für die Ungleichungsrelation:

- (RO1) Für jede reelle Zahl a$\in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen (= ist genau eine der drei Aussagen wahr):
$$a > 0,\ a = 0, -a > 0.$$
- (RO2+) Aus a>0 und b>0 folgt a+b>0
- (RO2·) Aus a>0 und b>0 folgt ab>0.
- (RO3) Zu jeder Zahl a$\in \mathbb{R}$ gibt es eine n$\in \mathbb{N}$, so dass n-a>0 gilt.

■ Einige Bezeichnungen und Schreibweisen:

Man definiert:

$$\boxed{\text{a>b}} \text{ steht für a-b} \quad >0$$
$$(a > b) \quad \Leftrightarrow \quad (a - b) > 0$$

Schreibweise, die meist benutzt wird:

$$(a \leq b) \iff (a < b \ \text{ ODER } a = b)$$
$$(a < b) \iff (b > a) \quad \text{usw.}$$

Sprechweise:

"Nicht negativ" für $a \geq 0)$

$$\boxed{\text{a<b<c}} \quad \text{steht für } \boxed{\text{(a<b) und (b<c)}}$$

■ Zu beweisende Gebrauchsregeln für den Umgang mit Ungleichungen:

(U1) Stets gilt einer der folgenden drei Fälle

$$\boxed{\begin{array}{l} a > b \quad \text{a=b} \quad \text{a<b} \\ \text{Aus a} \leq b \text{ und b} \leq a \quad \text{folgt a=b.} \end{array}}$$

(U2) 3 oder allgemeiner n verschiedene Zahlen lassen sich immer total ordnen.

(U3) Transitivität:

$$\boxed{\text{Aus a<b und b<c folgt a<c.}}$$

(U4)

$$\boxed{\text{Aus a<b folgt} \begin{cases} \frac{1}{b} < \frac{1}{a} & \text{für a>0} \\ a + c < b + c & \text{für alle c} \in \mathbb{R} \\ ac < bc & \text{für c>0} \\ ac > bc & \text{für c<0 !!!!} \end{cases}}$$

(U5) $\boxed{\text{Aus a<b und c<d folgt a+c<b+d.}}$

(U6) $\boxed{\text{Für a} \neq 0 \text{ ist stets a}^2 > 0.}$

(U7) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ findet man ein n$\in \mathbb{N}$, derart, dass $\boxed{0 < \frac{1}{n} < \varepsilon}$ gilt.

■ $\boxed{\text{Wie definiert man } |a| \text{ ?}}$

Wichtige Ungleichungen zum Betrag:

$$\boxed{a \leq |a|} \qquad |a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad \left|\sum_i a_i\right| \leq \sum_i |a_i|$$

$$|a_1 a_2 .. a_n| = |a_1||a_2|....|a_n|$$

■ Und einige **leicht zu beweisende Ungleichungen**

$$a, b, c, d > 0 \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \text{Dann gilt } \boxed{\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}}.$$

Für x>0 gilt $\boxed{\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \geq 1}$

OBdA $a > b$!!! $\boxed{|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}}$

Sei m=min($a_1, a_2, .., a_n$) und M=max($a_1, a_2, .., a_n$). Dann gilt

$\boxed{m \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n) \leq M}$ Interpretation?