Probeklausur

■ 1) Was ergeben die Distributivgesetze für den folgenden Rechenausdruck?

$$(a+2b+3c)\left(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c\right)$$

■ 2) Für n=0,1,2,3,... sei $T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

a) Schreiben Sie diese Summe für n=4 aus und berechnen Sie ihren Wert direkt. Etwa mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Wert von T_n allgemein mit Hilfe des Binomialsatzes. (Stimmen die Resultate für n=4 überein?)

■ 3) Erläutern Sie die folgenden Rechenschritte

$$\begin{aligned} a^2+6a+13 &= (a^2+2\cdot 3a+9)+4 \\ &= (a+3)^2+4 \\ &= (a+3)^2\left(1+\left(\frac{2}{a+3}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Was für (zulässige) Termumformungen werden dabei jeweils vorgenommen?

■ 4) Gegeben die folgende Bestimmungsgleichung in a:

$$(a+x)a+2(a-x)=3 \qquad \text{x äußerer Parameter}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen

b*) Für welche Werte von a) sind diese Lösungen reell? (Eventuell zuletzt angehen!)

■ 5) Es sei g eine Gerade in der Ebene. Von ihr wisse man: (1) Der Achsenabschnitt auf der x-Achse ist doppelt so groß wie der auf der y-Achse. (2) Der Punkt mit Koordinaten (x_1, y_1) =(4,3) liegt auf ihr.

Bestimmen Sie diese Gerade, indem Sie zunächst für alle Geraden, die (1) erfüllen eine Geradengleichung angeben. Und dann unter diesen die auswählen, die (2) erfüllt.

■ 6) Es sei $\vec{a}^K=(1,2,1)$ und $\vec{b}^K=(1,-2,1)$.

Berechnen Sie die folgenden Größen a) $\vec{a}^K+2\vec{b}^K$ und b) Zeichnen Sie $\vec{a}^K$, $\vec{b}^K$ und $(\vec{a}^K+2\vec{b}^K)$.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Vektor $\vec{x}^K$, der die Gleichung $2(\vec{a}^K-\vec{x}^K)=(\vec{a}^K\cdot\vec{b}^K)\vec{x}^K$ erfüllt (Skalarprodukt!)

■ 7) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (x,y unbestimmt, a äußerer Parameter:

2x+ay=3a
2ax+y=4

■ 8) Es seien g und h zwei Geraden im Raum mit Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \vec{x}_g^K(u) &= (1,0,H)+u(1,1,1) \\ \vec{x}_h(v) &= (0,2H,0)+v(1,-1,H) \end{aligned}$$

Dabei sei H äußerer Parameter.

a) Für welche Werte von H schneiden sich die beiden Geraden?

b) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Geraden für H=2?

■ 9) Es sei $\vec{a},\vec{b}\in V_0^3$. Durch was für einen Weg wird jetzt der geometrische Pfeil $\vec{a}+2\vec{b}$ festgelegt? Weiter sei K kartesisches Koordinatensystem und $\vec{a}^K=(1,2,4)$ und $\vec{b}^K=(1,-1,3)$. Was für einen Weg beschreibt dann der Koordinatenvektor $\vec{a}^K+2\vec{b}^K$? (Antwort in Worten)

■ 10) Für eine Flugparabel seien folgende Daten gegeben: $\vec{r}^K(0)$ = (0,2,0) und $\vec{v}(0)=(0,2,2)$. Und $\vec{g}=(0,0,-10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Ort und Geschwindigkeit)

b) Wo trifft die Bahn die Horizontalebene?

c) Wann und wo hat die momentane Geschwindigkeit dieselbe Richtung wie der Vektor (0,1,-1)?

■ 1) Was ergeben die Distributivgesetze für den folgenden Rechenausdruck?

$$(a+2b+3c)\left(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c\right)$$

L

$$\begin{aligned}&(a+2b+3c)\left(a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c\right)\\ =\ & a^2+b^2+c^2+\frac{5}{2}ab+\frac{10}{3}ac++\frac{13}{6}bc\end{aligned}$$

■ 2) Für n=0,1,2,3,... sei $\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$.

a) Schreiben Sie diese Summe für n=4 aus und berechnen Sie ihren Wert direkt. Etwa mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.

b) Berechnen Sie den Wert von T_n allgemein mit Hilfe des Binomialsatzes. (Stimmen die Resultate für n=4 überein?)

L a) Für n=4 gibt das ausgeschrieben:

$$T_4=2^0\cdot 1+2^1\cdot 4+2^2\cdot 6+2^3\cdot 4+2^4\cdot 1=81$$

b) Wir haben

$$(1+2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}2^k=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=T_n.$$

Damit folgt $\boxed{\mathrm{T}_n=3^n}$ für alle n. Insbesondere $\mathrm{T}_4=3^4=81$ wie berechnet.

■ 3) Erläutern Sie die folgenden Rechenschritte

$$\begin{aligned}a^2+6a+13 &= (a^2+2\cdot 3a+9)+4\\ &= (a+3)^2+4\\ &= (a+3)^2\left(1+\left(\frac{2}{a+3}\right)^2\right)\end{aligned}$$

Was für (zulässige) Termumformungen werden dabei jeweils vorgenommen?

L

$a^2+6a+13=$	(1) Vorbereitung für
$(a^2+2\cdot 3a+9)+4=$	quadratische Ergänzung.
$(a+3)^2+4=$	(2) Mit Binomialsatz (n=2)
$(a+3)^2\left(1+\left(\frac{2}{a+3}\right)^2\right)$	(3) Gezieltes Ausklammern von $(a+3)^2$,
	Potenzregel $\frac{x^a}{y^a}=\left(\frac{x}{y}\right)^a$ anwenden.

■ 4) Gegeben die folgende Bestimmungsgleichung in a:

$$(a+x)a+2(a-x)=3 \qquad \text{x äußerer Parameter}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungen

b*) Für welche Werte von a) sind diese Lösungen reell? (Eventuell zuletzt angehen!)

L a) a ist die Unbestimmte!

$$a^2 + (2+x)a - 2x - 3 = 0 \qquad \text{(Normalform!)}$$

Die p-q-Formel gibt

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\frac{1}{2}(2+x) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2+x)^2 + \frac{1}{4}(8x+12)} \\ &= -\frac{1}{2}(2+x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4x+4+8x+12} \end{aligned}$$

Endform

$$\boxed{a_{1,2} = -\tfrac{1}{2}(2+x) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+12x+16}}$$

b) Damit die Lösungen reell sind, muss $x^2+12x+16 \geq 0$ gelten. Wir verwenden quaudratische Ergänzung und finden

$$x^2 + 12x + 16 = (x+6)^2 - 20$$

Also: Für $(x+6) \leq -\sqrt{20}$ und $x+6 \geq \sqrt{20}$ erhält man relle a-Werte. Oder gleichwertig: Für $\boxed{x \leq -6-\sqrt{20} \text{ oder } x \geq -6+\sqrt{20}}$ erhält man reelle aq-Werte.

■ 5) Es sei g eine Gerade in der Ebene. Von ihr wisse man: (1) Der Achsenabschnitt auf der x-Achse ist doppelt so groß wie der auf der y-Achse. (2) Der Punkt mit Koordinaten $(x_1, y_1) = (4,3)$ liegt auf ihr.

Bestimmen Sie diese Gerade, indem Sie zunächst für alle Geraden, die (1) erfüllen eine Geradengleichung angeben. Und dann unter diesen die auswählen, die (2) erfüllt.

$\boxed{\text{L}}$ Die Bedingung (1) ergibt mit der Achsenabschnittsform der Geradengleichung

$$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{b freier Parameter}$$

Jede Wahl von b gibt die Gleichung einer Geraden, die (1) erfüllt. Und zu jeder derartigen Geraden gehört ein b-Wert mit der Bedeutung Achsenabschnitt auf der y-Achse.

Für welche b-Werte geht die Gerade durch (4,3)? Dann muss

$$\frac{4}{2b} + \frac{3}{b} = 1$$

gültige Gleichung sein. Das ist offensichtlich genau für b=5 der Fall! Die gesuchte (eindeutig bestimmte) gerade erfüllt $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ oder in Normalform

$$\boxed{y = -\tfrac{1}{2}x + 5}$$

■ 6) Es sei $\vec{a}^K = (1,2,1)$ und $\vec{b}^K = (1,-2,1)$.

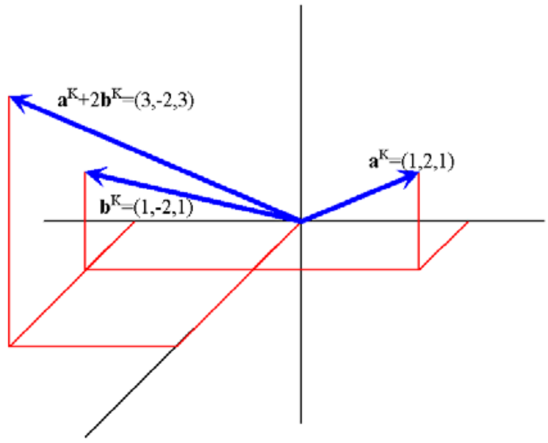
Berechnen Sie die folgenden Größen a) $\vec{a}^K + 2\vec{b}^K$ und b) Zeichnen Sie $\vec{a}^K$, $\vec{b}^K$ und $(\vec{a}^K + 2\vec{b}^K)$.

c) Bestimmen Sie rechnereisch den Vektor $\vec{x}^K$, der die Gleichung $3(\vec{a}^K - \vec{x}^K) = (\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K)\vec{x}^K$ erfüllt (Skalarprodukt!)

$\boxed{\text{L}}$ a)

$$\vec{a}^K + 2\vec{b}^K = (3,-2,3)$$

b)



c) $\vec{a}^K \cdot \vec{b}^K = -2$, also

$$3(\vec{a}^K - \vec{x}^K) = -2\vec{x}^K \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{x}^K{=}3\vec{a}^K}.$$

Das ist die eindeutige Lösung für $\vec{x}^K$.

■ 7) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (x,y unbestimmt, a äußerer Parameter:

2x+ay=3a
2ax+y=4

L

2x+ay=3a	-1
2ax+y=4	a

$$\boxed{\left(2a^2-2\right)x = a}$$

Verzweigung / Fallunterscheidung!

Fall i) a$\neq \pm 1$ x=$\frac{a}{2(a^2-1)}$ y=4-$\frac{2a^2}{2(a^2-1)} = \frac{4(a^2-1)-2a^2}{a^2-1} = \frac{2a^2-4}{a^2-1}$

$$\vec{x} = \frac{1}{2(a^2-1)}\begin{pmatrix} a \\ 4(a^2-2) \end{pmatrix}$$

Fall ii) a$^2 = 1$. Dann ist $\boxed{0x{=}\pm 1}$ zu erfüllen. Keine Lösung.

■ 8) Es seien g und h zwei Geraden im Raum mit Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \vec{x}_g^K(u) &= (1,0,H) + u(1,1,1) \\ \vec{x}_h(v) &= (0,2H,0) + v(1,-1,H) \end{aligned}$$

Dabei sei H äußerer Parameter.

a) Für welche Werte von H schneiden sich die beiden Geraden?

b) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Geraden für H=2?

L Tripelform:

$$\begin{aligned} \vec{x}_g^K(u) &= (1,0,H) + u(1,1,1) = (1+u, u, H+1) \\ \vec{x}_h(v) &= (0,2H,0) + v(1,-1,H) = (v, 2H-v, Hv) \end{aligned}$$

Gleichsetzen gemäß Schema:

1+u=v
u=2H-v Mit (1) v elmnieren:
H+1=Hv

$$
\begin{aligned}
u &= 2H-(1+u) \quad \text{also } \boxed{\text{2u=2H-1}} \\
H+u &= (1+u)H \quad \boxed{\text{u=uH}} \quad \text{u=0 oder H=1}
\end{aligned}
$$

Die Gleichung u=uH ist nur zu erfüllen für (i) u=0 oder (ii) H=1. Rückeinsetzen gibt jeweils eine Lösung. Nämlich:
i) H=1 / u=$\frac{1}{2}$ und v=$\frac{3}{2}$
ii) H=$\frac{1}{2}$ / u=0 / v=1

■ 9) Es sei $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$. Durch was für einen Weg wird jetzt der geometrische Pfeil $\vec{a} + 2\vec{b}$ festgelegt? Weiter sei K kartesisches Koordinatensystem und $\vec{a}^K = (1, 2, 4)$ und $\vec{b}^K = (1, -1, 3)$. Was für einen Weg beschreibt dann der Koordinatenvektor $\vec{a}^K + 2\vec{b}^K$? (Antwort in Worten)

$\boxed{\text{L}}$ Der mit $\vec{a}$ bezeichnete Pfeil wird vom Ursprung abgetragen. An seinen Endpunkt der verdoppelte mit $\vec{b}$ bezeichnete Pfeil. Die Diagonalverbindung gibt $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Man hat $\vec{a}^K + 2\vec{b}^K = (3, 0, 10)$. Daher handelt es sich um folgenden Weg: 3 Einheiten in der x-Richtung und dann 10 Einheiten parallel zur z-Richtung.

■ 10) Für eine Flugparabel seien folgende Daten gegeben: $\vec{r}^K(0) = $ (0,2,0) und $\vec{v}(0) = (0, 2, 2)$. Und $\vec{g} = (0, 0, -10)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Ort und Geschwindigkeit)
b) Wo trifft die Bahn die Horizontalebene?
c) Wann und wo hat die momentane Geschwindigkeit dieselbe Richtung wie der Vektor (0,1,-1)?

$\boxed{\text{L}}$

a)

$$
\begin{aligned}
\vec{r}^K(t) &= \text{(0,2,0)+(0,2,2)t+}\frac{1}{2}(0, 0, -10)t^2 = (0, 2+2t, 2t-5t^2) \\
\vec{v}^K(t) &= (0, 2, 2-10t)
\end{aligned}
$$

b) z(t)=0. D.h. 2t-5t^2 $= t(2-5t) = 0$ Also $t_1 = 0$ (Bekannt) und $t_2 = \frac{2}{5}$, der "Aufschlagzeitpunkt". Gefragt war wo? Bei t_1 in (0,2,0) und bei t_2 in $\vec{r}(\frac{2}{5}) = (0, \frac{14}{5}, 0)$.

c) Jetzt muss gelten $\lambda(0, 1, -1) = (0, 2, 2-10t)$. Für gesuchtes t und λ. Es folgt $\lambda = 2$ und daher -2=2-10t. Also erneut t=$\frac{2}{5}$. Der Ort wurde bereits bestimmt. Die Geschwindigkeit ist $\vec{v}^K(\frac{2}{5}) = (0, 2, -2)$.

Fertig.
