Probeklausur Vorkurs Mathematik 26.9.2002

Aufgaben und Lösungen!

Ein Hauptproblem: Es wird zu viel Zeit mit Unnötigem und Unwichtigem verbracht!

■ 1) Multiplizieren Sie (mit Hilfe der Distributivgesetze) den folgenden Ausdruck aus. (Endform)

$$(a^3 + 3a^2 + a - 3)^2.$$

▲ $(a^3 + 3a^2 + a - 3)^2 = a^6 + 6a^5 + 11a^4 - 17a^2 - 6a + 9.$
Fehler bei a^2. Gezielt: $a^2\,[2 \cdot 3(-3) + 1]$

####

■ 2) Was ergibt der Binomialatz für den folgenden Ausdruck? (Die Binomialkoeffizienten für n=4 wissen oder über das Pascalsche Dreieck bestimmen): $\boxed{(2 - x^2)^4}$

▲ $(2 - x^2)^4 = 16 - 32x^2 + 24x^4 - 8x^6 + x^8$
Häufig Fehler beim Vorzeichen $\sum \binom{4}{k} 2^{4-k} \boxed{\left(-x^2\right)^k}$

$$\left(-x^2\right)^k = (-1)^k x^{2k}$$

######

■ 3) Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung in x (mit a als äußerem Parameter) $\boxed{x^2 + 6ax = 7a^2.}$
▲ $x_{12} = -3a \pm \sqrt{9a^2 + 7a^2} = -3a \pm 4|a|$

p-q-Formel beherrschen, **Kürzen** $\frac{6}{2} = 3$!!! , Achtung $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$.

######

■ 4) Was versteht man unter dem *Ortsvektor,* was unter dem *Koordiantenvektor eines Punktes* ? Welche Beziehung besteht zwischen beiden? Was muß jeweils noch zusätzlich vorgegeben sein?

> ▲ Der *Ortsvektor des Punktes (bezüglich des Ursprungs)* ist der geometrische Pfeil, der vom gegebenen Ursprung zum Punkt zeigt. *Der Koordinatenvektor des Punktes (bezüglich K)* ist ein Zahltupel, das einen achsenparallen Weg vom Ursprung zum Punkt beschreibt.

Formulierungsschwächen und unvollständig! *Geometrischer Pfeil, Koordinaten im achsenparallelen Weg sollten angesprochen sein!*

#####

■ 5) Gegeben drei Punkte P,Q und R aus E^3 mit Koordinatenvektoren $\vec{x}_P^K = (2, 0, 0)$ und $\vec{x}_Q^K = (2, 0, 2)$ und $\vec{x}_R^K = (0, 3, 1)$.
a) Skizzieren Sie die drei Vektoren (räumliche Lage).
Räumliche Lage von Q vielfach nicht zu erkennen!
b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S (für gleiche Massen) dieser drei Punkte.
▲

$$\vec{x}_S^K = \frac{1}{3}(\vec{x}_P^K + \vec{x}_Q^K + \vec{x}_R^K) = \frac{1}{3}(4, 3, 3).$$

Einfachste Formelanwendung. Vielfach extrem umständlich.
c) Es sei E die Ebene, die von P,Q und R aufgespannt wird. Geben Sie eine Parametrisierung von E an. Wie lauten die Parameterwerte, die zum Schwerpunkt gehören.

▲ Etwa
$$\vec{x}_E(u,v) = (2,0,0) + u((0,0,2) + v(-2,3,1) = (2-2v, 3v, 2u+v)$$
Inspektion: 3v=$\frac{3}{3}$ gibt $\boxed{\text{v}=\frac{1}{3}}$ und 2u+v=$\frac{3}{3}$ gibt dann $\boxed{\text{u}=\frac{1}{3}}$.
Die Frage nach den Parameterwerten wurde übersehen (oder nicht beherrscht?)
d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}_P^K$ und $\vec{x}_Q^K$. (Angabe im Bogenmaß.)
▲
$$\cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$
e) Berechnen Sie das Vektorprodukt $(\vec{x}_Q - \vec{x}_P) \times (\vec{x}_R - \vec{x}_P)$ sowie dessen Betrag. Welche geometrische Größe innerhalb der Ebene E haben Sie mit diesem Betrag bestimmt?
▲
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Bettrag}=\sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$
Der Betrag liefert den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms. *Der letzte Teil vielfach schwach. Betrag der Normalen ist ungeheurer Quatsch. Bezug zur geometrischen Form des Vektorproduktes wurde erwartet.*

####

■ 6) Es seien $\vec{d_1}$ und $\vec{d_2}$ die beiden Diagonalen eines Parallelogramms in V_0^3. Diese seien gegeben. Bestimmen Sie die beiden Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Parallelogramms.
▲
$$\begin{array}{c} \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{e} = \vec{a} - \vec{b} \end{array} \qquad \text{das gibt sofort} \qquad \begin{array}{c} \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}) \\ \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{e}) \end{array}$$
Elemetare Rechnung. Vielfach viel zu lang. Vgl. Rechnung die zu cosx=$\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ führte!

####

■ 7) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(-3) = (0,-2,0)$ und $\vec{v}(-3) = (0,7,8)$. Weiter sei $\vec{g} = (0,0,-10)$.
a) Wie lautet die Flugparabel? (Achtung: Was ist an dieser Stelle alles sorgfältig anzugeben?)

▲ Wir haben $\boxed{T = t+3 \text{ und } t = T-3}$ für den Informationszeitpunkt. Damit
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (0,-2,0) + (0,7,8)T + \frac{1}{2}(0,0,-10)T^2 = (0, -2+7T, 8T-5T^2) \\ \vec{v}(T) &= (0,7,8-10T). \end{aligned}$$
Trotz der Mahnung vom Vortage und dem Aufgabentext: Einige verstehen das immer noch nicht und produzieren anschließend Unsinn oder garnichts. Im Skriptum vgl. das in (4.5.32) Gesagte. Alle nachfolgenden Fragen beziehen sich auf diese drei Zeilen.

Nachfolgend in Klammern gesetzte Teile dienen der erneuten Erläuterung und sollten in der Antwort nicht aufgeschrieben werden! Es gibt kein ausgelassenen Zwischenrechnungen!

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt.

▲ $\boxed{v_3(t_S) = 0}$ (das ist die Bedingung für den zugehörigen Zeitpunkt t_S.). Also $T_s = \frac{4}{5}$ und $t_S = T_S - 3 = -\frac{11}{5}$. Der Ort (folgt durch Einsetzen des Zeitwertes):
$$\vec{r}(-\frac{11}{5}) = (0, -2+7\left(\frac{4}{5}\right), 8\left(\frac{4}{5}\right) - 5\left(\frac{4}{5}\right)^2) = (0, \frac{18}{5}, \frac{16}{5}) = \frac{2}{5}(0,9,8)$$
.

c) Wo und wann trifft die Flugbahn die Horizontalebene (z=0)?

▲ z-Koortdinate Null setzen: $\boxed{8\text{T-}5\text{T}^2 = 0}$. Hat 2 Lösungen $\text{T}_1 = 0$ und $\text{T}_2 = \frac{8}{5} = 2T_S$. Damit folgt $\vec{r}(t_1) = (0, -2, 0)$ und $\vec{r}(t_2) = (0, \frac{46}{5}, 0)$.

c) Wo wird die z-Achse getroffen und unter welchem Winkel ?

▲ $\boxed{\text{x=0 und y=0}}$ gibt $\text{T}_z = \frac{2}{7}$ $\quad t_Z = -\frac{19}{7}$ und $\vec{r}(t_Z) = (0, 0, \frac{92}{49})$ und $\vec{v}(t_Z) = \big(0, 7, \frac{36}{7}\big) = \frac{1}{7}(0, 49, 36)$. Das gibt den Winkel mit $\vec{e}_3$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{36}{7}}{1 \cdot \frac{1}{7}\sqrt{49^2 + 36^2}} = \frac{36}{\sqrt{3697}}$$

d) Geben Sie die skalare Geschwindigkeit als Funktion der Zeit an.

▲

$$v(t) = \sqrt{49 + (8 - 10T)^2} = \sqrt{49 + (22 + 10t)^2}$$

■ 8) Lösen Sie (x,y Unbestimmte, a äußerer Parameter, Aufpassen!):

$$\boxed{\begin{array}{l} 2ax + 3y = 3a \\ 2a^2x + 4y = 3a \end{array}}$$

▲ "y raus"gibt: $\boxed{\text{2a(4-3a)x=3a.}}$. (Faktorisieren!) Jetzt ist eine Fallunterscheidung nötig.

- Fall A: a(4-3a)$\neq$ 0. Dann folgt $\underline{\text{x}=\frac{3}{4-3a}}$. und 3y=3a-2a$\frac{3}{4-3x} = \frac{3a(4-3a)-6a}{4-3a} = \frac{6a-9a^2}{}$ $\quad \underline{\text{y}=\frac{2a-3a^2}{4-3a}}$. Oder $\underline{\vec{x} = \frac{1}{4-3a}(3, 2a - 3a^2)}$
- Fall B: a=0. Das gibt folgende Bedingung: $\boxed{\text{0x=0.}}$. Also x frei und y=0 (in der ersten Gleichung 2ax+3y=3a ist a=0 zu setzen. Also $\boxed{\text{0x+3y=0}}$. Geht nur für y=0!) . Lösung $\boxed{\underline{\vec{x}_L(x) = x(1, 0).}}$
- Fall C: a=$\frac{4}{3}$. Jetzt hat man die Bedingung $\boxed{\text{0x=4}}$. D.h. die Gleichung ist unlösbar.

Das war schwach. Besonders das Lösen der Gleichung im Kontext $\boxed{8a\text{-}6a^2 = 0}$ *bereitet enorme Schwierigkeiten der üblichen Art. D.h. es wurde nicht faktorisiert! Schwer war das nicht.*

■ 9) Es sei $\vec{a}^K = (0, 3, 1)$ und $\vec{x} = (0, 3, 3)$. Zerlegen Sie $\vec{x}$ in die zu $\vec{a}$ parallele und senkrechte Komponente und zeichnen Sie die gesamte Konfiguration.

▲

$$\vec{p} = \frac{12}{10}\vec{a} = \frac{6}{5}(0, 3, 1) \qquad \vec{s} = \vec{x} - \vec{p} = (0, 3, 3) - \frac{6}{5}(0, 3, 1) = \frac{1}{5}(0, -3, 9).$$

Hier war die Zerlegungsformel $\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\vec{x}^2}\vec{x}}$ *anzuwenden. Und das Skalarprodukt war in Koordinaten auszurechnen!*

a) Sei $\vec{g} = (0, 0, -g)$ und $\vec{N} = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$. Zerlegen Sie $\vec{g}$ in eine zu $\vec{N}$ parallele und senkrechte Komponente. Fertigen Sie eine Skizze.

▲

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{-g\sin\alpha}{1}(0, \cos\alpha, \sin\alpha) \quad \vec{s} = -\vec{p} \\ \vec{s} &= \vec{g} - \vec{p} = (0, 0, -g) + g\sin\alpha(0, \cos\alpha, \sin\alpha) \\ |\vec{p}| &= g\sin\alpha \qquad (\text{da } \cos^2 + \sin^2 = 1, \quad |\vec{p}| \ \textit{wird häufig benötigt} \ ) \end{aligned}$$

Zerlegung zur schiefen Ebene

■ 10) Berechnen Sie distributiv $((\vec{a} + \vec{b})^2)^2$.

▲ Innen Skalarprodukt, außen reelles Produkt, von innen beginnen:

$$
\begin{aligned}
((\vec{a}+\vec{b})^2)^2 &= \left((\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\right)^2 \\
&= \left(\vec{a}^2+2(\vec{a}\vec{b})+\vec{b}^2\right)^2 \\
&= \left(\vec{a}^2\right)^2+4(\vec{a}\vec{b})^2+\left(\vec{b}^2\right)^2+4\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b})+2\vec{a}^2\vec{b}^2+4(\vec{a}\vec{b})\vec{b}^2
\end{aligned}
$$

*Leider **viel Unverständnis** über den Aufbau dieses Termes.* $\vec{a}^2(\vec{a}\vec{b})=\vec{a}^3\vec{b}$ usw.

■ 11) Bringen Sie die folgende komplexe Zahl in die kartesische Endform:

$$\frac{1}{4+i}+\frac{i}{1+\frac{1}{3+i}}$$

▲

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4+i}+\frac{i}{1+\frac{1}{3+i}} &= \frac{1}{4+i}+\frac{i(3+i)}{4+i} \\
&= \frac{3i}{4+i}=\frac{3i(4-i)}{17}=\frac{3+12i}{17} \\
&= \frac{1}{17}(3+12i)
\end{aligned}
$$

Relativ gut, sofern bis hierhin gekommen, nur auch hier viel zu lang!

■ *12) Sei z=x+iy (x,y$\in\mathbb{R}$) eine komplexe Zahl. Berechnen Sie das Produkt Z=$e^{i\alpha}z$ =u+iv kartesisch. Durch Vergleich können Sie u und v durch x und y ausdrücken.

Setzen Sie weiter $\vec{z}^K=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{Z}^K=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$. Schreiben Sie $\vec{Z}^K$ in Matrixform $\boxed{\vec{Z}^K=R.\vec{z}^K}$. Wie lautet die 2×2−Matrix R=R(α)?

a) Berechnen Sie dann gemäß der Regel *Zeile×Spalte* das *Matrixprodukt* R(α)R(β) und interpretieren Sie das Ergebnis.

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha}z &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(x+ix) \\
&= (\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot x)+i(\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y)
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\vec{Z}^K &= \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{R=R}(\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
R(\alpha)R(\beta) &\stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} R(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

(1) und (4) Bezeichnung einsetzen bzw. Rückeinsetzen. (2) Zeile mal Spalte und (3) Additionstheoreme!