Die heute 12.10. besprochenen Wiederholungsaufgaben.
Die im vergangenen Jahr gewünschten Aufgabentypen
Morgen das ausgelassen Kapitel 12.2

■ 1) a=4,b=-3. Was ergibt der Binomialsatz? Ergebnis für n=3 verifizieren.

1a) Sei g eine Gerade in der x-y-Ebene, die durch (3,2) geht und die x-Achse in x=5 trifft. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden. Wie lautet die zugehörige Achsenabschnittsform? Wo trifft die Gerade die zweite Winkelhalbierencde (mit Gleichung y=-x)?

■ 2) $\vec{a}^K = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b}^K = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ ..... Terme wie $\frac{\vec{a}^K \times \vec{b}^K}{\vec{a}^{K^2} + (\vec{a}\vec{b})^2}$ ausrechnen auch $\vec{a} \times (\frac{1}{7}\vec{b} - \frac{7}{9}\vec{a})$.

2a) Was besagt die Gleichung $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b})^K = \vec{a}^K \times \vec{b}^K}$??
($\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ und K ein kartesisches Koordinatensystem mit demselben Ursprung 0)

▼ Zwei unterschiedliche Wege, die durch den linken bzw. rechten Réchenausdruck beschrieben werden, führen stets zu demselben Resultat. Links wird zunächst geometrisch der geometrische Pfeil $\vec{a} \times \vec{b}$ bestimmt. Dieser Pfeil wird anschließend in K als achsenparaller Weg (Koordinatenvektor) dargestellt. Usw. ▲

■ 3) g Gerade, E Ebene Schnitt und Konfiguration Winkel / Schnitt $Gerade - Zylindermantel$

■ 4) Lineares Gleichungssystem mit und ohne äußeren Parameter.
(Erwartung. Analyse des Resultates im Lichte der allgemeinen Resultate)

4a) Geben Sie ein Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ bildet. Wann geht diese Ebene durch den Ursprung? Wie muss man das Gleichungssystem abändern, um eine parallel verschobene Ebene (als Lösungsmenge) zu erhalten? Wie findet man den kürzesten Abstand zum Ursprung?

■ 5) Flugparabelaufgaben. Formulieren Sie selbst den ersten Teil einer typischen Flugparabelaufgabe, so dass Sie die Fragen a-c) anschließen können:

Eine Flugparabel....(was ist anzugeben?)

a) Welche (vektorielle) Geschwindigkeit hat der Körper zur Zeit...?

b) Wo und wann trifft er .....

c) Wo und wann bildet die momentane Geschwindigkeit desKörpers mit der 3-Achse einen Winkel $\frac{\pi}{4}$? ($\frac{\pi}{6}$)

■ 6) Eine Bahnkurve t$\longmapsto \vec{r}(t)$ sei vorgegeben, d.h. bekannt. Beschreiben Sie den Bahnverlauf der folgenden drei Bahnkurven:

t$\longmapsto \vec{s}_1(t) = \vec{r}(t) + \vec{a}$ t$\longmapsto \vec{s}_2(t) = \vec{r}(t-a)$
t$\longmapsto \vec{s}_3(t) = \vec{r}(2t)$ $=5\vec{r}(t)$

Was kann man jeweils über das Bild der Abbildung (im Sinne des Abbildungsformalismus) sagen?
6b) Skizzieren Sie das Bild der folgenden drei ebenen Bahnkurven:

$$\vec{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \qquad \vec{S}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$$
$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

■ 7) Komplexe Zahlen / Die beiden Darstellungen / "Nenner mit i" / Einheitswurzeln.

■ 8) Kurvendiskussion f(x)=x$^3(2-x)e^x$
(Schema!)
und g(x)=x$^{\frac{1}{5}} \ln|x|$
7a) Lage der Wendepunkte von x$\longmapsto e^{-\alpha x^2}$ für $\alpha > 0$

$$\mathrm{f}(x)=e^{-\alpha x^2} \qquad \mathrm{f}'(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2} \qquad \mathrm{f}''(x) = e^{-\alpha x^2}(-2\alpha + 4\alpha x^2)$$

7b) Unterschied "Zuordnung" und "Zuordnungsverfahren" (Rechenausdruck, Term)

---

8) Ableitung $\frac{e^x+e^{-x}}{x^4+2}$ (Form!!)

9) Tangentenzerlegung angeben und nutzen:
Nullstelle von y=x$^5+3x+5=0$ näherungsweise....

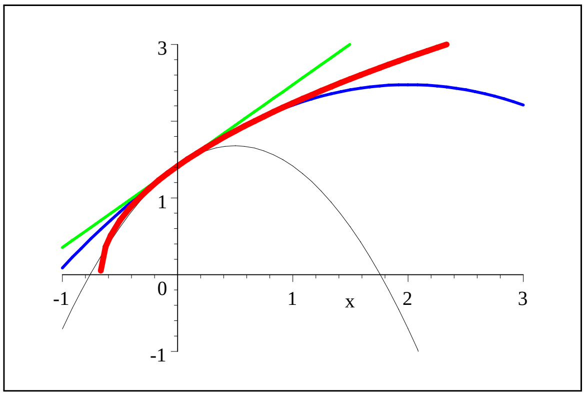
---

10) Integrale (...bis Substitution)

11) Rechenschritte erläutern und kommentieren

$$\sqrt{2+3x} = \sqrt{2}\left(1+\frac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{3}{4}x - \frac{3}{16}x^2 + ...\right)$$

Verwenden Sie dazu das folgende Bild. Bei einer der eingezeichneten Kurven liegt ein Rechenfehler vor. Statt $\frac{3}{16}$ wurde $\frac{3}{4}$ genommen.



Aufgaben zu den (im vergangenen Jahr) nachgefragten Themen

Komplexe Zahlen

★ *Woran erinnern? "Rechnen..." "Zwei Darstellungen und ineinenander Umwandeln" "Komplexe Konjugation" und "Eulers Formel".*

■ 1) $z_1 = 2 + 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = 2 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$ Berechnen Sie $z_1 + z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ auf jeweils zwei Weisen. Sofern Ihnen zunächst nur eine (naheliegende) einfällt, inspizieren Sie das Resultat. Wieso kommt es gerade heraus? Kann man das verstehen? Gibt es einen allgemeinen Grund dafür? Das sollte den kurzen Weg klären

Natürlich liegt es nahe, z_1 und z_2 auch zu zeichnen. Das ist leicht: Welcher Weg wird durch die Terme beschrieben, die z_1 und z_2 festlegen?

■ 2) Bestimmen Sie rechnerisch alle 4 Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 1 + i$$

Geben Sie die Lösungen auch in kartesischer Form an.

a*) Können Sie für die auftretenden sin- und cos-Werte exakte analytische Formeln angeben?

■ x sei reell. Zeigen Sie, dass $\frac{x+i}{x-i}$ den Betrag 1 hat.

★Flugparabeln: *Woran erinnern? Hauptformeln in beiden Formen./ Hilfsgröße T / Interpretation der 2×3 Komponenten.*

■ 3) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(-2) = (1, 0, H)$ und $\vec{v}^K(-2) = V(\cos\alpha, 0, \alpha\sin\alpha)$. Weiter sei $\vec{g} = (0, 0, -g)$.

a) Wie lautet die Flugparabel? (Alle Angaben)

b) Was läßt sich über die Lage der Flugbahn (relativ zum Koordinatensystem K sagen?)

c) Jetzt sei g=10,V=2 und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Sowie H=10. Ort und (vektorielle Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1=0 und t_2 = 2?

d) Werte wie in c). Wo befindet sich der Scheitelpunkt der Parabel? Wo trifft die Parabel die Horizontalebene z=0?

e) Werte für g, V usw. wieder allgemein. Wann und wo hat die Flugparabel eine vektorielle Geschwindigkeit proportional zu (-1,0,1)?

f) Werte wieder allgemein. Für welche Werte von g erreicht die Parabel eine Höhe von 2H (und darüber)?

★ Tangentenzerlegung: *Woran erinnern? Die Formel, Resttermbedingung, die zwei Denkfiguren, Ableitungsregeln...*

Denken Sie daran: Wird n groß, so geht $\frac{1}{n}$ nach Null!

■ 4) Wie lautet die Tangentenzerlegung von f(x)=$\frac{2+3x}{3+x-x^2}$ um x=0? (2. Denkfigur, man berechnet die Ableitung mit Hilfe der Ableitungsregeln)

■ 5) Die Tangentenzerlegung von $x \mapsto \sqrt{x}$ um $x_0 = 1$ lautet nach der zweiten Denkfigur $\sqrt{1+\Delta x} = 1 + \frac{1}{2}\Delta x + \Delta x R(1, \Delta x)$

Erläutern Sie stichwortartig die folgenden Rechenschritte:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3} - n &= n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - 1\right) \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{3}{n^2} + ... - 1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{n} + ...\end{aligned}$$

Was ist damit gezeigt? Bewiesen?

Und jetzt dasselbe für die folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+5n+3}-\sqrt{n^2+1} &= n\left(\sqrt{1+\frac{5n+3}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= n\left(1+\frac{1}{2}\frac{5n+3}{n^2}+..-\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+...\right)\right)\\
&= n\left(\frac{5}{2n}+...\right)\approx\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Was bedeutet das jetzt? Überprüfen Sie das Ergbnis am Beispiel n=10. Also $\sqrt{100+50+3}-\sqrt{101}$ und n=100.

■ 6) Bei der Tangentenzerlegung $\sqrt{1+\Delta x}=1+\frac{1}{2}\Delta x+\Delta x R_1(x,\Delta x)$ wächst der absolute Fehler für $\Delta x>0$ monoton mit Δx. Ab welchem Δx macht der absolute Fehler ungefähr 5% des exakten Wertes aus?

Substitionsregregel

■ 7) Berechnen Sie das folgende Integral einmal direkt über "Umkehrung der Kettenregel" und einmal mit Hilfe der Substitution u=cost :

$$I=\int_0^\pi\frac{dt\ \sin(t)}{1+3\cos^2(t)}$$

■ 8) Wandeln Sie das folgende Integral mit der (Eulerschen) Substitution u=x+$\sqrt{x^2-x-2}$ in ein lösbares Integral um. Über welche x>0 darf integriert werden?

$$J=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x-2}}.$$

a) Geben Sie eine numerische Abschätzung des Integrales (0$\leq J\leq A$ Wert von A?)

■ 9) Diskutieren Sie die Substitution u=tan($\frac{x}{2}$) . Was leistet Sie?

■ 10) Berechnen Sie I(A)=$\int_0^A dx\ \sqrt{1+x^2}$ mit Hilfe der Substitution x=sh(u)=$\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$.

a) Wie ist die Substitution abzuändern für $\int_0^A dx\ \sqrt{1+ax^2}$ mit a>0?

b) Probieren Sie es alternativ mit der Substitution $\sqrt{a+bx+cx^2}=xt+\sqrt{a}$, die natürlich wieder von Euler ist.

c) Was ergibt die (erste) Substitution für das Integral $\int_0^1 dx(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$, was für $\int_0^1 dx(1+x^2)^2$?

■ 11) Durch direkte Integration findet man $\int_{-1}^2 dxx^2=...=3$. Verifizieren Sie das. Mit der Substitution u=x^2 dagegen folgt

$$\int_{-1}^2 dxx^2=\int_1^4 du\frac{u}{2\sqrt{u}}=..=\frac{7}{3}.$$

■ 12) Es wurde vorgeschlagen, das Integral I= $\int_a^b\frac{dx}{1-x^2}$ mit Hilfe naiv naheliegender Substitutionen zu lösen. Der Einfacheit sei 1<a<b.

Versuchen Sie die folgenden 4 Substitutionen y=x^2 und u=1-x^2 und v=$\frac{1}{1-x^2}$ und x=sinα

Beispiel:

	y=x^2 x=$\sqrt{y}$ x>0	u=1-x^2 x=$\sqrt{1-u}$ x>0	v=$\frac{1}{1-x^2}$ x=$\sqrt{\frac{v-1}{v}}$ x>0..
	dx=dy$\frac{1}{2\sqrt{y}}$	dx=du$\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}$	dx=$\frac{dv}{2v^{\frac{3}{2}}\sqrt{v-1}}$ verifizieren!
	$\int_a^b dx\mapsto\int_{a^2}^{b^2}dy$	$\int_a^b dx\mapsto\int_{1-a^2}^{1-b^2}du$	$\int_a^b dx\mapsto\int_{\frac{1}{1-a^2}}^{\frac{1}{1-b^2}}dv$
	$\int_{a^2}^{b^2}dy\frac{1}{2\sqrt{y}(1-y)}$???	$\int_{1-a^2}^{1-b^2}du\frac{-1}{2\sqrt{1-u}}\frac{1}{u}$???	$\int_{\frac{1}{1-a^2}}^{\frac{1}{1-b^2}}\frac{dv}{2\sqrt{v}\sqrt{1-v}}$???

x=cosα $\alpha = asn(x)$ Nur für -1<x<1!!!!
dx=$d\alpha(-\sin\alpha)$
...
$\int d\alpha(-\sin\alpha)\frac{1}{1-\cos^2\alpha} = -\int \frac{d\alpha \sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ = UK Das alte Integral