Übung komplexe Zahlen
Nr.11 / 28.9.2005

Komplexe Zahlen

■ 1) Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die komplexe Multiplikation (über die Tunnelmethode)

■ 2) $\boxed{\text{Rechenübungen}}$: Sei $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 3 + 3i$. Bestimmen Sie für die folgenden Rechenterme die kartesische Endform u+iv. Meist gibt es mehrere Rechenwege. Bemühen sie sich jeweils, einen kurzen zu finden.

$z_1 z_2$	$(z_1 + z_2)^2$	$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$	$(z_1 + iz_2)^2$
$(1+z_1)^2$	$1+z_1 + z_1^2$	$2z_1 - 3z_2$	$(i+z_1)(i - z_2)$

■ 3) a) Wandeln Sie in die polare Darstellung um (dabei zur Kontrolle mindestens eine geistige Skizze machen!):

3+3i	3+4i	3-4i	-3+4i	-3i

b) Wandeln Sie in die kartesische Darstellung um:

$3e^{2i}$	$5e^{-2i}$	$3e^{4i}$	$2e^{i\pi}$	$3e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-5e^{i\frac{\pi}{4}}$	$e^{-\frac{\pi}{2}+2}$

c) Umwandeln mit Taschenrechner oder Computerprogramm!

■ 4) Sei z=3-4i. Bestimmen Sie dazu z^2, $\sqrt{z}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{i-z}$, (i-z)(z+1) und $\sqrt{i+z}$ sowohl in polarer als auch in kartesischer Form. (Das Resultat möglichst effizient in einer geeigneten Darstellung ansteuern, dieses umwandeln.)

■ 5) Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke:

$\frac{3-4i}{2+i} + \frac{5+i}{2-i}$	$\frac{i+\frac{2-i}{2+3i}}{1-\frac{2+5i}{2-3i}}$	$i+\frac{1}{2+i} + \frac{1}{2}$	$\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{\pi}{2}}}$

■ 6) Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Lösungen für z von $\boxed{(1+i)z^2-3iz+2=3i.}$

■ 7) Bestimmen Sie alle komplexen z, die die folgende Gleichung erfüllen: $\boxed{\frac{i}{(1+i)+\frac{1}{i(z+1)}}=\frac{1}{3+i}}$. a)

Dasselbe für $\boxed{\frac{1}{z+i}+\frac{2}{z-i}=3+4i}$.

■ 8) Bestimmen Sie alle 7 Lösungen von $z^7 = i$.

■ 9) Sei a=u+iv (u,v$\in \mathbb{R}$) eine komplexe Zahl. Bestimme $\sqrt{a}$ a) über einen polaren Ansatz und b) über einen kartesischen

■ 11) Versuchen Sie $\boxed{w=\frac{az+b}{cz+d}}$ nach z aufzulösen. Wann geht das? Setzen Sie t$\mapsto z(t) = 2 + ti$. Was für eine Figur wird hierdurch parametrisiert? Bilden sie jetzt t$\mapsto w(z(t))$. Was für eine Figur wird hierdurch parametriert? Läßt sich diese Konstruktion verallgemeinern? Wie wird man sie charakterisieren?

■ 12) Sei z eine komplexe Zahl. Wie erhält man deren Betrag, wenn Sie a) kartesisch, b) polar und c) durch einen allgemeineren Rechenausdruck gegeben ist?

■ 13) Lineares Gleichungssystem mit **komplexen** Koeffizienten:
a) Ein einfaches Beispiel eines derartigen $(2 \times 2)-$Systems ausdenken und aufschreiben. Matrixform.
b) Gilt der entwickelte Lösungskalkül weiter? Rechnen Sie Ihr Besipiel. Endform? Begründung.
c) Was ist bei äußeren Parametern?
d) Gelten die allgemeinen Resultate? Wie steht es mit der Veranschaulichung?

■ 14) Die folgenden beiden Gleichungen lassen sich nach sinα und cosα auflösen.

Tun Sie das: $\boxed{\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos\alpha + i\sin\alpha \\ e^{-i\alpha} &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned}}$

a) Bilden Sie von beiden Seiten der erhaltenen Gleichung für sin die dritte Potenz: $(...)^3$. Was folgt dann mit naheliegenden Termumformungen, wenn Sie am Ende die Real- und die Imaginärteile beider Seiten gleichsetzen? Verallgemeinerung? Was leisten die dabei entstehenden Formeln?

■ 15) Was für eine Figur wird in der komplexen Ebene durch die folgende Parametrisierung beschrieben?

$$t \longmapsto z(t) = \frac{1}{2+3ti}$$