Noch **Vektorrechnung im** $\mathbb{R}^2_K$.

■ **Die Zykloide**: Ein Kreis mit Radius R rolle geradlinig auf einer Ebene. Auf dem Kreisrand sei ein Punkt P markiert. Bestimmen Sie die Bahnkurve $\boxed{t \mapsto \vec{r}^K(t)}$ dieses Punktes. Denken Sie daran, mit der Wahl eines günstigen Koordinatensystems zu beginnen! Anschließend den geometrischen Pfeil aus mehreren leicht beschreibbaren Wegstücken geometrisch zusammensetzen!

Aufgaben zum Skalarprodukt

■ 0) (Aufwärmaufgaben) Den Winkel zwischen $\vec{e} = (1,1,2)$ und $\vec{f} = (3,1,1)$ bestimmen. / Was versteht man unter Bilinearität des Skalarproduktes? / Wie erkennt man mit Hilfe des Skalarproduktes, ob der Winkel (zwischen...) spitz oder stumpf ist? / Bestimmen Sie alle zu (1,2,3) senkrechten Vektoren einmal rechnerisch und einmal über die Nutzung allgemeiner Resultate! / Den *Cosinussatz für Dreiecke* vektoriell herleiten! / $(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \cdot (4\vec{a} + 2\vec{b}) = \ldots$

Welcher Bezug besteht jeweils zu den 4 Sachverhalten Ihrer *Inselausrüstung* ?

■ 1) (Noch Aufwärmaufgaben) Alle Indizes K werden fortgelassen! Sei

$$\vec{a} = (1,3,7) \quad , \quad \vec{b} = (4,0,-2) \quad \text{und} \quad \vec{c} = (3,-1,0).$$

- Berechnen Sie: $\vec{a}^2$, $|\vec{a}|$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$, $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}^2\vec{c}$, $\vec{b}^2\vec{c}^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- Die Einheitsvektoren in Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{a} - 2\vec{b}$ bestimmen (Jeweilige Anzahl?)
- Den (skalaren) Abstand der Endpunkte von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ angeben.
- Den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$.
- Zerlegen Sie $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nach Richtung und Länge.

■ 2) Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für das Skalarprodukt die Terme

$$\begin{array}{ll} (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})^2 - (\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) \cdot (\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}) & \qquad \text{und} \\ ((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}))(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})^2(\vec{a} - \vec{b}). & \end{array}$$

■ 3) Formen Sie mit Hilfe der Bilinearität des Skalarproduktes den Term

$$\left(\vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}\right)^2$$

um. Es muß $\vec{a}^2(\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b}))^2$ herauskommen.

▼ Lösung: Man kann wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} \left(\vec{a}^2\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}\right)^2 &= \left(\alpha\vec{b} - \beta\vec{a}\right)^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \vec{a}^2 \;\text{ und } \beta = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= \alpha^2\vec{b}^2 + \beta^2\vec{a}^2 - 2\alpha\beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= \left(\vec{a}^2\right)^2\vec{b}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\vec{a}^2 - 2\vec{a}^2(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \left(\vec{a}^2\right)^2\vec{b}^2 - \vec{a}^2(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2\left[\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\right] \end{aligned}$$

▲

■4) Wie kann man mit Hilfe des Skalarproduktes Winkelhalbierende parametrisieren? Welches Schnittproblem bietet sich an? Versuchen Sie sich daran.

■ 5) Gegeben das 1×3-System $\boxed{2x+3y+7z=10}$. Bestimmen Sie für die Lösungsebene die Achsenabschnitte, den (kürzesten) Abstandsvektor und dessen Länge.

■ 7*) Berechnen Sie koordinatenfrei den Tetraederwinkel (Vorlesung!)

■ 8) Gegeben Sei die Vektorgleichung $\boxed{\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}$ vom Typ der Zentralformel. Multiplizieren Sie beide Seiten dieser Gleichung skalar einmal mit $\vec{a}$ und einmal mit $\vec{b}$. Kann man mit dem Ergebnis α und β bestimmen? ($\vec{x}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien gegeben)

▼ Antwort. (**Die hier benutzte Methode** erweist sich als nützlich). Unter Ausnutzen der Bilinearität folgt zunächst:

$$(\vec{a}\cdot\vec{x}) = \alpha\vec{a}^2 + \beta(\vec{a}\cdot b)$$
$$(\vec{b}\cdot\vec{x}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \beta\vec{b}^2$$

Die Aufgabe gibt α und β die Rolle von Unbestimmten. Der Rest: Alles gegebene Zahlen. D.h.: Ein lineares inhomogenes $2\times 2 - System$.

Elimination einer Unbestimmten ist für $\mathrm{F}^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2 \neq 0$, also $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unterschiedliche Richtungen, möglich und gibt:

$$\alpha = \frac{\vec{b}^2(\vec{a}\cdot\vec{x}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{x})}{F^2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\vec{a}^2(\vec{b}\cdot\vec{x}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{x})}{F^2}$$

▲

■ 9) Wie erhält man zu einer gegebenen Geraden Vektoren dazu senkrechte Vektoren? Dasselbe für eine gegebene Ebene.

■ 10) Was für Figuren werden durch die folgenden 3 Mengen (im Konfigurationsraum) festgelegt? $\vec{a} \in V_0^3$ sei ungleich Null und äußerer Parameter.

$\{\vec{x}\mid\vec{x}\in V_0^3,\ \vec{x}^2 = 9\}$	$\{\vec{x}\mid\vec{x}\in V_0^3,\ (\vec{a}\cdot\vec{x}) = 9\}$	$\{\vec{x}\mid\vec{x}\in V_0^3,\ (\vec{a}\cdot\vec{x}) = 9, \vec{x}^2 = 4\}$

■ 11) Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}(1) = (2,2,1)$ und $\vec{v}(1) = (0,1,3)$. Unter welchem Winkel trifft die Flugbahn die x-y-Ebene? (Immer "Winkel zwischen zwei Vektoren", hier zwischen momentaner Geschwindigkeit und $\vec{e}_3$).

a) Umkehrung: Der Winkel zwischen momentaner Geschw. und $\vec{e}_3$ (der gegebenen Flugparabel) sei bekannt. Kann man daraus die zugehörige Höhe z=H bestimmen?

■ 12) Noch Skalarprodukt: Es seien g und h zwei Geraden im Raum. Dann sind der "kürzeste Abstand" zwischen den Geraden und der "Winkel zwischen den Geraden" wichtige Bestimmungsstücke der Konfiguration.

Beide lassen sich mit Hilfe des Skalarproduktes bestimmen. Überlegen Sie sich eine zugehörige Strategie.

Was den kürzesten Abstand betrifft, so sollte der **Vektor** des kürzesten Abstandes bestimmt werden, samt der Lage dieses Vektors relativ zu den beiden Geraden.

Rechnen Sie als konkretes Beispiel $\vec{x}_g(a) = a(1,2,3)$ und $\vec{x}_h(b) = (2+b, 3b, 1)$.

■ 13) $3x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 2$ beschreibt eine Ebene im Raum. Als Skalarprodukt schreiben ($\vec{a}\vec{x} = \vec{b}$) und in die verschiedenen in (6.1.40) gegebenen Formen bringen und interpretieren!

■ 14) Gegeben zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^3_K$. Wie erhält man einen zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechten Vektor? (Rechnerisch, nicht wie im $\mathbb{R}^2_K$ durch unmittelbare Inspektion)

■ 15) (Kap. 6.1) Die Gerade g sei nicht parallel zur Ebene E und treffe die Ebene im Punkte P. g werde in p "reflektiert". g sei als Parametrisierung gegeben. Ebenso E. Bestimmen Sie eine Parametrisierung der reflektierten Geraden. Hinweis: Denken Sie an die Zerlegung in parallele und senkrechte Komponente.

■ 16) Beweisen Sie :

Der Schwerpunkt S (einer Konfiguration von Massepunkten) besitzt die folgende Eigenschaft: Legt man eine Ebene E durch den Schwerpunkt S und bezeichnet der Index i alle die Massepunkte, die auf einer Seite der Ebene liegen mit Masse m_i und mit kürzestem Abstand a_i und bezeichnet j alle Punkte auf der anderen Seite der Ebene, mit Masse m_j und jeweiligem Abstand a_j von der Ebene, dann gilt das folgende verallgemeinerte Hebelgesetz

$$\Sigma m_i a_i = \Sigma m_j a_j$$

(Wieso gehört die Frage zum Thema Skalarprodukt?)

Aufgaben zum Vektorprodukt

■ 15) Sei $\vec{a} = (1,3,2)$ und $\vec{b} = (-2,3,-1)$ und $\vec{c} = (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{5}) = \frac{1}{30}(15,40,-12)$.

a)Berechnen Sie $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times (\vec{a} - \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{a})$, $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 5\vec{c})$.

b) Zerlegen Sie $\vec{a}$ in die zu $\vec{b}$ parallele und senkrechete Komponente.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einmal mit Hilfe des Skalarproduktes und einmal mit Hilfe des Vektorproduktes.

d) Welche Orientierung haben die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

■ 16) Die Eckpunkte A,B,C eines Dreiecks seien in der Ebene durch ihre Koordinaten gegeben. Leiten Sie eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks her.

Hinweis: Die Ebene als x-y-Ebene des $\mathbb{R}^3_K$ interpretieren und mit dem Vektorprodukt arbeiten. Geht es auch mit dem Skalarprodukt?

■ 17) Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem für den typischen Fall und finden Sie so die Berechnungsformel für das Vektorprodukt in Komponentenform. Also keineswegs alle Fallunterscheidungen. Auch keine Brüche!

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{array}}$$

a) Kann man das Vorgehen auf höhere Dimensionen verallgemeinern?

■ 18) Gegeben sei eine lineare Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$ für n=3 und b$\neq$ 0.

a) Diese Gleichung läßt sich in die Form $\vec{N} \cdot \vec{x} = 1$ bringen. Welche geometrische Interpretation haben die drei Komponenten von $\vec{N}^K$?

b) Jetzt bringen wir die Ausgangsgleichung auf die Form $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ mit $|\vec{n}| = 1$. Welche Interpretation hat d?

c) Rechnen Sie ein konkretes Beispiel.

■ 19**) Beweisen Sie die Formel $\boxed{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}}$. Hinweis Ein geschicktes Koordinatensystem wählen! Verstehen Sie den Bau der Formel, was ist zu merken?

■ 20) Leiten Sie mit Hilfe der bewiesenen *Gebrauchs*-Gleichung $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ eine häufig benötigte nützliche Formel für $(\vec{a} \times \vec{b})^2$ her. Hinweis: Im Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ die Faktoren zyklisch vertauschen!