

1. Bringen Sie folgende Parametrisierungen in die geometrische Form:

$$\vec{y}_g(a) = (1 - a, 2a, 5a - 7) \quad \text{und} \quad \vec{x}_E(u, v) = (1 + u - 2v, a + 2u, bv)$$

2. Angenommen die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Zentralformel liegen alle in einer Ebene, aber nicht alle auf einer Geraden. Und \vec{x} sei ein Vektor dieser Ebene. Zeigen Sie, dass es dann viele Lösungen der Gleichung $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ in x, y, z gibt. Bestimmen Sie diese.

3. Es sei $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (1, 0, 7)$.

- (a) Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden, die durch die Endpunkte von \vec{a} und \vec{b} bestimmt wird.
 (b) Liegt der Punkt Q mit $\vec{x}_Q^K = (4, 9, -15)$ auf dieser Geraden?
 (c) Zeigen Sie, daß der Nullpunkt nicht auf dieser Geraden liegt. Bestimmen sie dann eine Parametrisierung der Ebene E, die durch den Nullpunkt geht und g enthält.
 (d) Wo schneidet E die x-y-Ebene.

4. Ein bewegter Körper befinde sich zur Zeit $t_1 = -2$ am Orte A und zur Zeit $t_2 = 5$ am Orte B mit Koordinatenvektoren $\vec{r}_A = (-3, 5, 7)$ und $\vec{r}_B = (0, -4, 13)$.

- (a) a) Wie groß ist die mittlere vektorielle Geschwindigkeit in diesem Zeitraum?
 (b) b) Angenommen, der Körper bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: Wo befindet er sich zur Zeit $t = -5$?
 (c) c) Wann schneidet er die x-y-Ebene (bei konstanter Geschwindigkeit)?

5. In einigen Eckpunkten eines Würfels werden Massen angebracht. In den 4 Eckpunkten des oberen Deckels je eine Masse m und in einem der unteren Eckpunkt eine Masse M. Bestimmen Sie den Schwerpunkt dieses Systems.

6. Wo liegt der Schwerpunkt des Systems "Erde Mond"?

7. Was für eine Gleichung ergibt sich, wenn man den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt legt?

8. Was läßt sich über die Geraden g und h sagen, die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben sind:

$$\vec{x}_h(a) = \vec{a} + 2\vec{b} + (3a - 1)\vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{x}_j(\alpha) = 2\vec{a} + \vec{b} + (\alpha + 1)\vec{b}.$$

Ist $g=h$ möglich?

9. Ein Fluß der Breite B fließe (idealisiert) mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{V} . In dem Fluß fährt ein Motorboot mit der konstanten Geschwindigkeit \vec{w} **relativ zum Wasser**. Wie weit wird das Motorboot abgetrieben, wenn es von einem Ufer zum gegenüberliegenden fährt?

Zusatzfrage: Das Boot habe konstanten Geschwindigkeitsbetrag. Unter welchem Winkel muß es starten, um ein vorgegebenes Stück A abgetrieben zu werden?

10. Ein dicker Ring aus Eisen wird erhitzt. Vergrößert oder verkleinert sich dabei der innere Radius? Welcher Bezug besteht zur Vektorrechnung? Skizzieren sie den Sachverhalt eventuell an Hand einiger einfacher Figuren.

11. Gegeben zwei parallele Geraden im Raum. Wie beschreibt man den Streifen zwischen diesen beiden Geraden vektoriell?

12. Parametrisieren sie alle Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt $P \in E^3$ gehen. Das ist mit 3 Parametern leicht, sollte aber auch mit zweien gehen. Was für ein Problem tritt auf?

13. Ein Mensch bewegt sich mit konstanter vektorieller Geschwindigkeit an einer Straßenlaterne vorbei. Wie bewegt sich die Spitze seines Schattens? (Bezeichnungen, Rollenverteilung, gesuchte Form des Resultates- dann Lösung.)
14. Ein Strahl verläßt den Ursprung mit der Richtung $\vec{n}^K = (1, 1, 2)$. In der Ebene $z=H$ wird der Strahl reflektiert. Die Richtung des reflektierten Strahles ist $\vec{r}^K = (1, 2, -3)$. Wo trifft der reflektierte Strahl die x-y-Ebene?
15. Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(2) = (0, 0, 0)$ und $\vec{v}^K(2) = (5, 5, 10)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0, 0, -10)$. Wie lautet die Formel für die Flugparabel? (Geometrische und Tupelform!) Wie die vektorielle Geschwindigkeit.
- (a) $\vec{r}^K(0) = \dots?$ $\vec{r}^K(-2) = \dots?$ $\vec{v}^K(-2) = \dots?$ $\vec{r}^K(3) = \dots?$
- (b) Wo liegt der Scheitelpunkt?
- (c) Wann und wo wird die Ebene $z=2$ getroffen?
16. Ein Beobachter verschafft sich den Ort einer Flugparabel zum Zeitpunkt $t_0=3$. Er findet $\vec{r}(3) = \vec{a}$. Außerdem findet er den Ort zu einem anderen Zeitpunkt $t_1 = -2$. Er findet $\vec{r}(t_1) = \vec{b}$. **Bestimmen Sie die zugehörige Flugparabel.** Hinweis rechnen Sie koordinatenfrei in V_0^3 . Zusatzfrage: Was ist, wenn man statt der Lage die beiden momentanen Geschwindigkeiten kennt? Welche dritte Möglichkeit gibt es?
17. (Wie Nr. 16) Von einer Flugparabel wisse man $\vec{r}(t_1) = \vec{a}$ und $\vec{r}(t_2) = \vec{b}$. ($t_1 \neq t_2$, \vec{a}, \vec{b} gegeben.) Bestimmen Sie die Flugparabel. (Hier zeigt sich die Nützlichkeit einer **allgemeinen Rechnung!**)
18. **Schnittmengenbestimmung:** Zwei Ebenen E und F seien wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{x}_E(a, b) &= \vec{u} + a\vec{d} + 2b\vec{e} & \vec{d} &= (1, 1, 0) & \vec{u} &= (1, 0, 1) \\ \vec{x}_F(c, d) &= 2\vec{u} - c\vec{e} + d(\vec{e} + 2\vec{d}) & \vec{e} &= (0, 2, -1) \end{aligned}$$

Vorgehen sorgfältig durchdenken!

19. Diskutieren Sie das Problem des Schnittes zweier Ebenen in **vier Dimensionen**
20. In der Ebene sei eine Gerade g durch eine Gleichung gegeben. Wie erhält man daraus eine Parametrisierung der Geraden? Lösen Sie das für die beiden **Geradengleichungen** $y=mx+b$ und $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$.
- a) Die beiden Geraden g und h. seien durch die Gleichungen $y=2x+3$ für g und $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ für h gegeben. Bestimmen Sie deren Schnittpunkt einmal mit Hilfe der Gleichungen und einmal über vektorielle Parametrisierungen.
21. Eine Flugparabel erfülle $\vec{r}^K(5) = (0, 0, H)$ mit $H \geq 0$ und $\vec{v}^K(5) = (0, 2, 2)$. Weiter sei $\vec{g}^K = (0, 0, -g)$.
- a) Wie groß ist g höchstens zu wählen, damit die Flugparabel die Höhe $z=5H$ erreicht?
- b) Wie groß ist H zu wählen, damit auf der Horizontalbene ($z=0$) eine größere Ursprungsentfernung als $5H$ erreicht wird?

Aufgaben zum Kalkülteil von Kap. 5: **Lineare Gleichungssysteme**

- Klassifizieren (äußere Parameter??) und Vermutungen zu k und ℓ aufstellen.
- Lösung bestimmen, möglichst geometrische Endform herstellen.
- Tatsächliches k und ℓ mit vermuteten Werten vergleichen. Sind eventuelle Fallunterscheidungen vollständig?

■ 2) (1 min und 6min)

$3x+7y=4$
$2x-y=1$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = \frac{1}{3}$
$\frac{x}{2} - y = 1$

■ 3) Vergleichen Sie die folgende 4 inhomogenen Gleichungssysteme und skizzieren Sie deren Lösungsmenge in \mathbb{R}^2 .

$2x+7y=3$

$2x+7y=3$
$4x+3y=5$

$2x+7y=3$
$4x+3y=5$
$3x+5y=4$

$2x+7y=3$
$4x+3y=5$
$3x+5y=0$

■ 4) Und mit äußerem Parameter:

$ax+7y=a$

$2x+7y=3$
$4ax+3y=4$

$2x+ay=3$
$(a-3)x+3y=5$
$3x+5y=4$

$2x+7y=3$
$4x+3y=4$
$3x+5y=a$

Und mit mehr Veränderlichen (a,b äußere Parameter)

$2x+7y-3z=0$
$2x+3y+3z=0$
$2x+5y+z=0$

$2x+7y-3z=0$
$2x+3y+5z=0$
$2x+5y+z=0$

$2bx+7y-3abz=a$
$2x+3ay+5z=b$

■ 5) Einige besondere Systemformen

$x-2y+z/3+7w=1$
$y/3+7z-3w=2$
$z+w=0$
$2w=4$

$y/3+7z-3w=2$
$z+w=0$
$x-2y+z/3+7w=1$
$x+w=2$

$x+y=1$
$y+z=2$
$z+w=3$
$w+x=a$

■ 6) Und etwas größer:

$2x+2y-z+t=4$
$4x+3y-z+2t=6$
$8x+5y-3z+4t=6$
$8x+5y-3z+4t=12$
$3x+3y-2z+2t=6$

$3a+4b-6c+7d=5$
$-3a-2b+c=6$
$5b-c+9d=0$

■ 7) Schnitt zweier Ebenen im \mathbb{R}^4 . Wir starten mit zwei Parametrisierungen (etwa 3 min):

$$\vec{x}_E(a, b) = (2 + 3a, a + b, -b, 1 + a)$$

$$\vec{x}_F(c, d) = (2 + c, d, 1, -c - 2d)$$

■ 8) Bestimmen Sie die Schnittmenge und interpretieren Sie das Ergebnis

$x+2y+3z+4w=1$
$x+3y+5z+7w=2$

$x+y/2+z/3+w/4=1$
$x+y/3+z/5+w/7=2$

■ 9) Im Rahmen einer Klausuraufgabe im 2. Semester war folgendes Gleichungssystem in α, β, γ zu lösen. Infolge unzulänglicher Rechenkompetenz entstanden zahlreiche Fehler.

$\alpha - 4\beta + 16\gamma = A^{-4}$	(1)-(2)
$\alpha - 2\beta + 4\gamma = A^{-2}$	(3)-(2)
$\alpha + 6\beta + 36\gamma = A$	