Vorkurs Mathematik Übung Nr. 2   15.9.2005

■1) Skizzieren Sie den Winkel $\varphi = 1$ (im Bogenmaß) im üblichen Koordinatensystem. Dasselbe für $\psi = -1.4$ und $\chi = 7$. Rechnen Sie danach in Grad um.

■2) Skizzieren Sie die (räumliche) Lage des Punktes, der in Polardarstellung durch r=2, $\vartheta = \varphi = 1$ gegeben wird. ■3*) Wie wird man "Raumwinkel" definieren?

■4) Skizzieren Sie die räumliche Lage der geometrischen Pfeile, die wie folgt gegeben sind: $\vec{a}^K = (2, 3, 4)$ und $\vec{b}^K = (2, -3, 4)$ und $\vec{c}^K = (-1, 0, 4)$. In einer Figur! Es kommt immer darauf an, die räumliche einerseits festzulegen und andererseits eine übersichtliche Figur zu haben

■5) Koordinaten aus Figur ablesen: Beispiel: Gegeben ein Würfel der Kantenlänge a. Wie sollte man das Koordinatensystem legen? Es gibt zwei naheliegende Möglichkeiten. Wählen Sie eine und bestimmen Sie die Koordinatenvektoren der Eckpunkte. Was läßt sich über diese sagen? *Verallgemeinerung auf 2 und dann 4 Dimensionen!

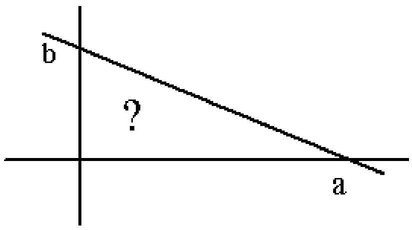
5a) Ein Zylinder der Höhe H mit Achse auf der z-Achse und Boden auf der x-y-Ebene. Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren der Punkte des oberen Deckelrandes. (Fehlende Bezeichnung selbst einführen).

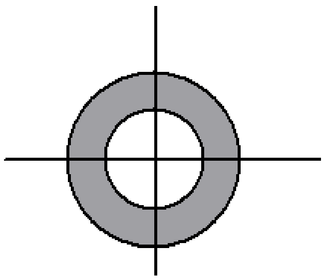
■6) Grundriss und Aufriss von Figuren. Wie ist das im Rahmen des Koordinatenvektorbegriffs zu verstehen?

■7) Wieviel achsenparallele Wege führen in einem gegebenen Koordinatensystem vom Ursprung zu einem festen Endpunkt?

■8)) Beschreibung von Figuren in $\mathbb{R}^2_K$ durch Angabe der zugehörigen Teilmenge.

Zwei Beispiele:





Und umgekehrt: Wie sehen die Figuren aus, die durch folgende Mengen beschrieben werden

$M_1 = \{(x, y) \mid$ (x,y)$\in \mathbb{R}^2_K$, -1$\leq x \cdot y \leq 1\}$ $M_2 = \{(x, y) \mid$ (x,y)$\in \mathbb{R}^2_K$, $x^2 + y^2 < y\}$

■9) Teilmengenbeschreibung mit Hilfe von Koordinatenvektoren:

a) **Von der Darstellung zur Geometrie.** Was für geometrische Figuren werden dargestellt? Eventuell eine Skizze! Die zusätzlichen Angaben der Art x,y,z$\in \mathbb{R}$ sind fortgelassen. Achtung: dies liest sich x$\in \mathbb{R}$ und y$\in \mathbb{R}$ und z$\in \mathbb{R}$! Freie Parameter.

$$A = \{(x, y, z) | z \geq 3\}; B = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 1); C = \{(x, y, z) | x > 0, y > 1)$$

$$D = \{(u, v, w) | w = 2\}, E = \{(u, v, w) | -1 < x < 1, -1 < y < 1\}, F = \{(u, v, w) | w = u^2 + v^2\}$$

b) **Von der Geometrie zur Darstellung**: Stellen Sie folgende Objekte durch Mengenangabe dar: Kugel mit Radius R / Zylinder mit Radius r und Höhe h.

Welche Freiheiten und Mehrdeutigkeiten hat man?

■10) In der Ebene E^2. Ein erstes Koordinatensystem K wird vorgegeben. Dazu zwei Punkte P und Q mit Koordinatenvektoren $\vec{x}^K_P = (2, 2)$ und $\vec{x}^K_Q = (3, 4)$. Fertigen Sie eine Skizze dieser Konfiguration. Zeichnen Sie jetzt (möglichst mit anderer Farbe) ein zweites Koordinatensystem L ein mit demselben Ursprung, denselben Einheiten, aber um $\frac{\pi}{4}$ gegen K verdreht. Schätzen Sie über die Skizze die Koordinatenvektoren $\vec{x}^L_P$ und $\vec{x}^L_Q$. Können Sie sie auch berechnnen? Zeichnen Sie jetzt ein drittes Koordinatensystem M ein, das parallel zu K verläuft mit Ursprung in $\vec{a}^K = (1, -2)$. Bestimmen Sie $\vec{x}^M_P$ und $\vec{x}^M_Q$.

Vorkurs Mathematik Übung Nr. 3
16.9.2005und **Wochenende**

■ 1) Wie sieht die Menge aller Punkte in der Ebene aus, deren (kartesische) Koordinatendarstellung (x, y) die Eigenschaft hat: $|x| + 2\,|y| \leq 1$?

■ 2) Die Tangente an die Parabel mit Gleichung $y=x^2$ hat im Punkte (x_0, x_0^2) die Steigung 2 x_0. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente. Fertigen Sie für $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x_0 = \frac{3}{2}$ ein e Skizze, die zeigt, dass wirklich die jeweilige Tangente vorliegt.

■ 2a) Gegeben ein weiterer Punkt mit Koordinatenvektor (x_1, y_1). Wann ist eine Gerade durch diesen Punkt Tangente an die Parabel mit Gleichung $y=x^2$?

■ 2b) Gegeben x_1 und x_2 mit zugehörigen Punkten (x_1, x_1^2) und (x_2, x_2^2) auf der Parabel. Wo schneiden sich die beiden zugehörigen Parabeltangenten?

■ 3) Vereinfachen Sie die folgenden Rechenausdrücke zu einer sinnvollen Endform

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \frac{1}{7}(3, 14, 10) + (\frac{4}{7}, -1, \frac{3}{7}) \\
\vec{d} &= \frac{1}{6}\vec{e} + \vec{f} \qquad \text{mit} \quad \vec{e} = (4, 6, 3) \quad \text{und} \quad \vec{f} = (\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}) \\
\vec{w} &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 2^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

■ 4) Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$. Wie erhält man geometrisch den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$. Entwickeln Sie 2 Methoden!

Anwendung: Gegeben drei Punkte P,Q,R$\in E^3$, die die Eckpunkte eines Dreiecks im Raum bilden sollen. Wie wird man die drei Kantenvektoren vektoriell darstellen? Wie die Innenpunkte des Dreiecks?

Als Zahlbeispiel $\vec{x}_P^K = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_Q^K = (0, 2, 0)$, $\vec{x}_R^K = (0, 0, 3)$ wählen. (Mit Skizze!)

■ 5) Unsinnige Gleichungen? Welche sind sinnvoll, welche nicht und warum?

$2\left(3\vec{x} + \vec{a} - \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right) = \vec{x} - 7$		$3\vec{x}(7 - \vec{b}) = \vec{a}$
$3(\vec{x}7 - \vec{b}) = \vec{a}$		$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{\vec{a}}{x}$
$\frac{\vec{a}+2\vec{x}}{1+2x^2} = \frac{a}{\vec{x}}$		$(2 + a)(3 - b)(\vec{x} - \vec{a}) = \frac{\vec{x}}{(2-a)}$

■ 6) Begründen Sie das Assoziativgesetz der Vektoraddition in V_0^3 mit Hilfe einer Skizze.

■ 7) Sei $\vec{a} = (1, 3, -2)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$ und $\vec{c} = (1, 1, -1)$.

a)Bestimmen Sie folgende Vektoren (als Tripel): $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $4\vec{a} - 3\vec{c}$, $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3\vec{c}$

b) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck auf zwei Weisen! (Was folgt?):

$$3(\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{c} - 6\vec{b}) + 3(\vec{b} - \vec{a}).$$

■ 8) $\vec{a}, \vec{b}$ wie in Aufgabe 7). Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$, der die folgende Gleichung erfüllt: $3(\vec{x} - \vec{a}) + 2(3\vec{b} - \vec{x}) = \vec{a} - \vec{x} + 5(\vec{b} - 2\vec{x})$.

8a) Dasselbe für:

$$\frac{3\vec{x}}{1 + a^2} + \frac{\vec{a}}{1 - a^2} = 2a(3\vec{x} + \vec{a}) \qquad \text{Rollenverteilung??}$$

■ 9) Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem nach $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ auf. Welche inhaltliche Interpretation ist naheliegend?

$$\begin{aligned}
M\vec{x}_S &= m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 \\
\vec{d} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1
\end{aligned}$$

■ 10) **Schwerpunkt:** In den 4 Punkten A,B,C,D sei je eine Masse m angebracht. Die Ortsvektoren seien $\vec{x}_A^K = (2, 0, 0)$, $\vec{x}_B^K = (0, 3, 0)$, $\vec{x}_C^K = (0, 0, H)$ mit H>0, und $\vec{x}_D^K = (0, 7, 0)$.

a) Machen sie eine Skizze, in der Sie auch die Lage der verschiedenen Schwerpunkte abschätzen oder einzeichnen.

b) Bestimmen sie den Schwerpunkt von (A,C),von (B,D) und (A,B,C). Die Lagen vor der Rechnung in der Skizze abschätzen!

d) Bestimmen Sie den Schwerpunkt aller vier Punkte auf drei Weisen. (Unter Nutzung der Resultate aus b) und des "Mobileprinzips".)

■ 11) Wir betrachten die kubische Bestimmungsgleichung

$$x^3 + px + q = 0 \text{ in der Unbestimmten x.}$$

Diese Gleichung soll auf zwei Weisen gelöst werden.

a) Machen Sie den Ansatz x=$\frac{\alpha}{y} - y$ mit noch freiem Parameter α. Setzen Sie dies in die Gleichuing für x ein. Bestimmen Sie α so, daß sie die entstehende Glweichung in y lösen können. Zuerst y^3 bestimmen, damit dann $(\alpha/y)^3$ berechnen und dann erst die dritten Wurzeln bilden. Das ergibt x. (Erste Methode.)

b) Machen Sie den Ansatz x=u+v. Durch Einsetzen und Zusammenfassen erhält man die Gleichung $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + p) + q = 0$. Das ist erfüllt, wenn man 3uv+p=0 und $u^3 + v^3 + q = 0$ verlangt. Aus der ersten Gleichung folgt $27u^3v^3 = -p^3$. Aus beiden Gleichungen folgt $v^6 + qv^3 - (p/3)^3 = 0$. Das ist lösbar. Analog für u. Es folgt:

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und} \quad u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Erneut folgt eine Lösung (der drei) Lösungen. (Zweite Methode.)

■ 12) Zeigen Sie, dass die in 11) gegebene Form des kubischen Polynoms allgemein ist, weil man zu ihr durch eine einfache Substitution gelangt: Starten Sie mit

$$q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Setzen Sie x=u+x_0 und zeigen Sie, dass man dann x_0 so wählen kann, dass das entstehenden Polynom in u keinen Summanden mit u^2 enthält, also von der in 11) gegebenen Form ist.

■ 13) Lösen Sie die Vektorbestimmungsgleichung $\boxed{\alpha\vec{x} = \vec{b}}$ nach $\vec{x}$ auf. Begründen Sie dazu jeden der unachfolgend gegebenen Schritte stichwortartig ausschließlich mit Hilfe der Vektorraumaxiome und der Grundregeln der reellen Zahlen. Die Begründung muss von oben nach unten und von unten nach oben durchgehen. Wieso? Dabei sei $\alpha \neq 0$ angenommen. Wo geht diese Annahme ein?

$$\begin{array}{ll} \alpha\vec{x} = \vec{b} & \text{..} \\ \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\vec{b} & \\ (\frac{1}{\alpha}\alpha)\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b} & \\ 1\vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b} & \\ \vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{b} & \end{array}$$

■ 14) Zur Leitliniendefinition der Ellipse:

Gegeben eine Gerade g in der Ebene und ein Punkt E, nicht auf dieser Geraden. Bestimme die Menge (d.h. den geometrischen Ort) aller Punkte P, für die die Lotlänge ℓ von P auf g proportional zum Abstand r von P nach E ist. (Feste Proportionalitätskonstante K=$\frac{\ell}{r}$).

Wählen Sie ein Koordinatensystem, dessen Ursprung auf der Lotgeraden von E auf g liegt und beschreiben Sie alle Punkte durch ihre Koordinatenvektoren. $\vec{x}_P^K = (x, y)$, $\vec{x}_E^K = (e, 0)$. Der Fußpunkt F des Lotes sei $\vec{x}_F^K = (0, A)$. Wählen Sie A>e.

a) Fertigen Sie eine Skizze. (Das sollte jeder können!) .

b)*Bestimmen Sie über die Skizze eine Gleichung für die Koordinaten der Punkte P der Figur. (Das ist leicht!)*

c) Zeigen Sie, dass man für K=1 die Gleichung einer Parabel erhält.

d) Zeigen Sie, dass man für K>1 die Gleichung einer Ellipse erhält. Wo liegt der Mittelpunkt der Ellipse? (Das verlangt etwas mehr Rechnung!)

Weiter offen: Zahl der zulässigen Beklammerungen (3.3.13) und Beweis von (3.3.39), also $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ und (-1)$\vec{x} = -\vec{x}$ nur mit Hilfe der Axiome.

Bearbeiten Sie möglichst viele dieser Aufgaben. **Jeder von Ihnen sollte eine Aufgabe , von der er meint, dass er sie mit Anstrengung eigenständig lösen kann (oder konnte), auswählen, die Lösung ordentlich aufschreiben und montag abgeben.**