■ 1) Durch $\varphi(x) = ae^{-|x|}$ werde die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der reellen Achse beschrieben.

- a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor a, die charakteristische Funktion, die ersten 4 Momente (auf zwei Weisen!) sowie Streuung, Schiefe und Exzess. Dazu die Verteilungsfunktion Φ.
- b) Fertigen Sie eine Figur mit dem Graphen, in der Sie möglichst viele der gewonnenen Resultate eintragen.
- c) Verifizieren Sie für das Beispiel die folgende Formel für die inverse Fouriertransformation, mit der man die Dichte aus der charakteristischen Funktion zurückgewinnnt. Verwenden Sie den Residuensatz:
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} G(k).$$
- Es sei P das zu φ gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß und Φ die zugehörige Verteilungsfunktion. Wir bilden die beiden Mengen $S_\alpha = \{x|x \in \mathbb{R}, \Phi(y) \le \alpha\}$ und $R_\beta = \{x|x \in \mathbb{R}, \Phi(y) \le \beta \text{ oder } \Phi(y) \ge 1-\beta\}$. (Skizze!). Bestimmen Sie α so, daß $P(S_\alpha) = 0.05$ gilt. Bestimmen β so, daß $P(R_\beta) = 0.05$ gilt. Was wäre, wenn man $P(R_\beta) = 0.1$ fordert? Welche Bedeutung hat dieser Aufgabenteil?
- Es seien X_1, X_2 und X_3 Zufallsgrößen, deren Werte mit φ verteilt sind. Bestimmen Sie die Dichtverteilung von $X_1 + X_2$ und von $X_1 + X_2 + X_3$. Hinweis: Über die charakteristische Funktion gehen.
- Verifizieren Sie für die charakteristische Funktion den zentralen Grenzwertsatz.

■ 2.) Gegeben sei die folgende Dichtefunktion:

$$\boxed{\psi(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)^2}.}$$

- a) Welche Momente existieren? Bestimmen Sie die charakteristische Funktion und prüfen Sie die Konsistenz mit der Antwort zum ersten Fragenteil.

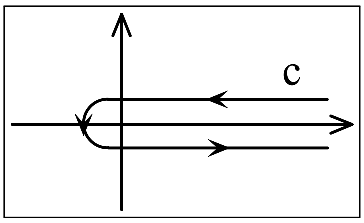
■ 3*) Die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 seien über J=[0,1] beide gleichverteilt. Wir bilden daraus die Vektorgröße $\vec{X} = (X_1, X_2)$. Weiter sei $\vec{f}=(J\times J, \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}), \mathbb{R}^2)$ eine glatte injektive Abbildung, so daß eine glatte inverse Abbildung existiert. Wir bilden den neuen Zufallsvektor $\vec{Y} = \vec{f}(\vec{X})$.

- a) Bestimmen Sie die Dichte, mit der $\vec{Y}$ verteilt ist. (Substitutionsregel für $\mathbb{R}^2$ nutzen!)
- b) Wählen Sie $y_1 = \sqrt{-2\ln(x_1)}\cos(2\pi x_2)$ und $y_2 = \sqrt{-2\ln(x_1)}\sin(2\pi x_2)$. Wie sind y_1 und y_2 dann verteilt? Welche nützliche Konsequenz ergibt sich für die Computerarbeit?

■ 4A) Drücken Sie (mit Hilfe der definierenden Reihen) die ersten vier Kumulanten durch die Momente aus.

■5A) Diskutieren sie das Verhalten der Funktion $z \mapsto h_\alpha(z) = \frac{e^{-\alpha z}}{\sin(\pi z)}$ in der komplexen Ebene. ($\alpha > 0$)

1a) Bestimmen Sie $\int_c dz h_\alpha(z)$ wobei c der folgende Weg sein soll:



Endpunkte bei unendlich