Höhere Mathematik III   Übung Nr. 12 / 23.1.2004

■ 1) Diskutieren Sie die Konvergenzeigenschaften der folgenden Potenzreihe: $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}}$.

Hinweis: Die Bestimmung des Konvergenzradius ist ganz leicht. Aber Sie können und sollen mehr zeigen: Auf dem Einheitskreis gibt es eine dichte Menge von Punkten, für die die Reihe divergiert! Betrachten Sie Punkte der Form n,N$\in \mathbb{N}$, $k<N!$ und z=$e^{2\pi i \frac{k}{N!}}$.

■ 2) Für welche Punkte der komplexen Ebene konvergiert die folgende Reihe? $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+z^{2k}}}$. Ist das Ergebnis holomorph?

Untersuchen Sie erneut das Verhalten auf dem Einheitskreis.

■ 3A) Jede holomorphe Funktion hat einen maximalen zusammenhängenden Definitionsbereich. (Analytische Fortsetzung.) Die bisherigen Beispiele lassen vermuten, dass in diesem Bereich mindestens eine aufgeschnittene Ebene enthalten ist. Wofür sind dann die Funktionen derbeiden ersten Aufgaben Beispiele?

■ 4A) Entwickeln Sie f(z)=$\frac{1}{z(z-3)}$ in eine Potenzreihe um z=1. Wie groß ist der Potenzradius? / Keine große Rechnung! Eine der gewußten Potenzreihen. Wenn doch *rechnen,* wie sollte man vorgehen?

Wie lautet die Laurentreihe von f(z) um z=0?

■ 5 A) Durchgehen der Beispiele Meyberg-Vachenauer II S. 64-79.

■ 6) Der komplexe Arcustangens sei wie in der Vorlesung eingeführt. Zeigen Sie, dass dann (für alle z der geschnittenen Ebene gilt

$$atn(z) = z \int_0^1 \frac{dt}{1+z^2t^2}$$

■ 7) In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes das Maximumsprinzip für den Betrag holomorpher Funktionen f=u+iv hergeleitet. Kann man ein entsprechendes Prinzip für den Realteil u und den Imaginärteil v herleiten?

Hinweis: Denken Sie an die Darstellung f(z)=$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} f(z+re^{it})$.

■ 8) Es sei r(t)=$\begin{cases} H & \text{für } 0 \le t \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Berechnen Sie die Laplacetransformierte

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ und x(t)=0 für t<0 mit Hilfe der Laplacetransformation

■ 9) f(t) habe die Laplacetransformierte $\hat{\text{f}}$(p). Bestimmen Sie die Funktion g(t), deren Laplacetransformierte gleich $e^{-\alpha p}\hat{f}(p)$ ist mit $\alpha > 0$. (Nutzen Sie zur Formulierung die Heavisidefunktion $\theta(t)$!)

■ 10) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte von f(t)=$\frac{1}{\sqrt{t}}$.