Höhere Mathematik III Übung Nr. 10 (9.1.2004)
(H3 möglichst früh - vor der Anwesenheitsübung - bearbeiten!)

■A1) Diskutieren Sie z$\mapsto \frac{1}{1+z^2}$ (Kartesische und polare Darstellung, Verhalten, speziell Dominanz, Veranschaulichung).

■A2) Kartesische und polare Darstellung von $e^{(e^{iz})}$.

■A3) Prüfen Sie Cauchy-Riemann für z$\mapsto \frac{1}{z}$.

■A4) Berechnen Sie $\int_c dzz^2$ explizit für drei Wege, die 0 und 2+2i verbinden.

■A5) Was ergibt $\int_{|z|=R} dze^{iz^2}$?

■A6) Beschreiben Sie das asymptotische Verhalten von z$\mapsto e^{-z^2}$ für große z. Genauer für z=R$e^{i\alpha}$ mit α fest und R nach unendlich.

■A7) Wie hängen sin(z) und sh(z) zusammen?

■A8) Ist z $\mapsto \bar{z}$ holomorph?

■A9) Eine ausgesprochen wichtige Grundfunktion ist z$\rightarrow z^\alpha$ und α aus $\mathbb{R}$ oder sogar $\mathbb{C}$. Auch sie lässt sich auf exp und ln zurückführen. Und zwar schreibt man $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. diskutieren Sie das Verhalten dieser Funktion. Defintionsbereich (mit geeignetem Schnitt)? Aymptotisches Verhalten in der komplexen Ebene? Was ist mit $\alpha \in \mathbb{Z}$?

■ A10) Bestimmen sie alle homogenen Polynome 3. Grades (in x und y), die harmonisch sind. Wie erhält man diese mit Hilfe der Zuordnung $z \mapsto z^3$? Die Laplacegleichung $\Delta u = 0$ ist linear. Wieso ist das für unsere Frage bedeutsam? Verallgemeinerung auf andere Grade?

■ H1) Sei $f(z) = z^2$ und $z_0 = 1 + i$. Weiter sei r(t)=(1+t)+i und s(t)=1+i(t+1). Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel, die Bildkurven f$\circ s$ unf f$\circ r$ sowie deren Schnittwinkel.

■ H2) Sei f :G$\rightarrow \mathbb{C}$ holomorph f(x+iy)=R(x,y)$e^{i\alpha(x,y)}$ und mit $f'(z) \neq 0$ in G. Skizzieren Sie zwei Beweise, die zeigen, dass die Niveaukurven R=const und z=const aufeinander senkrecht stehen. (Wieso ist der Beweis wichtig?)

a) Was geschieht in Punkten mit $f'(z) = 0$. Diskutieren Sie mindestens die beiden Beispiele f(z)=z^2 und f(z)=1+z^2 für z=0.

■ H3) Prüfen Sie, dass z$\mapsto \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt. Welche Veranschaulichung ist für z$\mapsto e^z$ günstig? (Gehen Sie die einzelnen Möglichkeiten durch.)

a) Definieren Sie die Umkehrabbildung z$\mapsto \ln z$ mit einem Schnitt auf der negativ reellen Achse und gehen Sie die Veranschaulichungsmöglichkeiten durch.

■ H4) z$\mapsto z^2 = u(x, y) + iv(x, y)$. Wie sehen die beiden Höhenflächen für u und v aus? Was bedeuten hier die jeweiligen Falllinien.

■ H5) Setzen Sie dz=dx+idy und f(z)=u(x,y)+iv(x,y). Das ist als Wahl einer bestimmten Parametrisierung zu interpretieren. Welcher? Bringen Sie dann den Integranden in folgende Form

$$dzf(z) = (dx + idy)(u + iv) = dxF_1 + dyF_2 = dt\dot{x}F_1 + dt\dot{y}F_2$$

Frobenius verlangt Gleichheit der überkreuzten Ableitungen: $F_{1y} = F_{2x}$. Zeigen sie, dass das tatsächlich infolge der Cauchy-Riemann-Gleichungen gilt!

■ H6) Zur Cauchyschen Integralformel: Schreiben Sie diese für f(z)=z^2 und g(z)=e^z auf und bringen Sie die entstehenden Wegintegrale in Parameterform. Bewundern Sie die so entsteheden Identitäten. Versuchen Sie diese zumindest in einem Fall durch explizites Berechnen des Integrales zu verifizieren.

■ H7) Beweisen Sie die Invarianz des komplexen Wegintegrales gegen orientierungstreue Umparametrisierungen.

■ H8) Beweisen Sie: $\boxed{1+e^{iz}+e^{2iz}+...+e^{inz}=\frac{1-e^{i(n+1)z}}{1-e^{iz}}}$

a) Zerlegen sie in Real- und Imaginärteil. Was folgt?

b) Welche Verallgemeinerungen bieten sich an?

c) Vereinfachen Sie entsprechend $e^{-inz} + e^{-i(n-1)z} + ... + 1 + ... + e^{inz}$.

■ H9) Diskutieren Sie das Verhalten von $\boxed{z\mapsto w=\frac{a-z}{b-z} \quad \text{für } a\neq b.}$

Hinweis: Was kann man generell über die Bilder von Geraden und Kreisen unter dieser Abbildung sagen? Wie wird man all diese geometrischen Figuren mathematisch **auf einen Schlag** beschreiben ? Zur Wahl stehen Parametrisierung und Gleichung. Hier ist die Gleichungsform vorzuziehen!