Übungen Höhere Mathematik III Nr.9 12.11.03

■ 1) Auf einem Kreis mit Radius R rolle ein zweiter Kreis mit Radius r mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ab. Auf dem zweiten Kreis sei ein Punkt P fixiert. Bestimmen Sie die Bahnkurve des Punktes als Koordinatenkurve im $\mathbb{R}^2_K$. (Das Koordinatensystem geschickt wählen.)

a) Was ist, wenn der zweite Kreis im Innern des ersten abrollt?

b) Welche Spezialfälle sind besonders interessant?

■ 2) Wieviel Prozent des Erdvolumens liegen nördlich von Wuppertal? (Erdform: Kugel. Entwickeln Sie hierzu zunächst eine allgemeine Formel, die Sie dann auf das Problem anwenden. Achtung. Was bedeutet geographische Breite in der Polarparametrisierung?)

■ 3) Es sei K der wie folgt gegebene Zylinder im $\mathbb{R}^3_K$:

$$K = \{(x,y,z)|0 \leq z \leq 5, x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Weiter sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld, das in kartesischen Koordianten wie folgt gegeben ist:

$$\vec{v}^K(x,y,z) = \vec{e}_1(x+y) + \vec{e}_2(y+z) + \vec{e}_3(z+x)$$

a) Stellen Sie dies Feld in Zylinderkoordinaten dar.

b) Kann man das Feld als Gradienten eines Skalrfeldes schreiben? Wieso ist das für a) relevant?

c) Verifizieren Sie am Beispiel den Gaußschen Satz. ZUnächst in kartesischen Koordinaten, dann in Zylinderkoordinaten.

■ 4) Wir betrachten die folgende Kurve

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (rt\cos\omega t, rt\sin\omega t, Ht^2).$$

a) Was für ein geometrischer Weg wird hierdurch beschrieben?

b) Bestimmen Sie begleitendes Dreibein, Krümmung und Torsion.

■ 5) Formulieren und lösen Sie die Frenet-Serreschen Formeln für das Beispiel einer ebenen gleichmäßigen Kreisbewegung.

■ 6) Sei p(t)=(t,αt^2) mit $\alpha > 0$. Der zugehörige Weg ist eine Parabel. Bestimmen Sie den geometrischen Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte und den Ort aller Punkte, die den Abstand 1 zur Parabel haben. (Von außen und von innen).

■ 7) Mit Hilfe der in (4.3.15) eingeführten Toruskoordinaten werde die folgende Bahnkurve beschrieben

$$\vec{s}(t) = R\vec{E}(\Omega t) + r\vec{e}(\omega t).$$

Was läßt sich über den entstehende Weg Bild$\vec{s}$ sagen? Achtung, es sind eine Reihe von Fallunterscheidungen erforderlich! Der "typische Fall" ist durchaus kompliziert und erfordert und lohnt genauere Inspektion.

■ 8) Es sei K$\subset V^3_0$ ein kompakter Körper mit glatter Oberfläche ∂K. Weiter sei $\vec{n} : \partial K \to V^3$ das Feld der nach außen weisenden Einheitsnormalen auf der Oberfläche. Dann gilt $\boxed{\int_{\partial K} d\vec{F} \cdot \vec{n} = 0}$.

a) Welche Mittelwertaussage ist in der behaupteten Gleichung enthalten?

b) Beweisen Sie die Behauptung mit Hilfe des Gaußschen Satzes. Hinweis: Was liefert der Gaußsche Satz für konstante Felder?

c) Angenommen $\vec{v}(\vec{x}) = grad\varphi(\vec{x})$ und

■ 9) Die Mercatorprojektion.

Sei $(\theta,\varphi) \mapsto \vec{x}_P(\theta,\varphi)$ die übliche Polarkoordinatenparametrisierung der Kugeloberfläche mit Radius R. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und u$\mapsto g(u)$ eine monoton wachsende reelle Funktion. Betrachten Sie die folgende neue Parametriserung der Kugeloberfläche

$$(u,v) \mapsto \vec{x}_M(u,v) = \vec{x}_P(g(u), \lambda v)$$

Bestimmen Sie g so, dass diese Abbildung winkeltreu wird.

Hinweis: Zu beiden Parametrisierungen gehört eine beschreibende Matrix des metrischen Tensors (g^P_{ik}) und (g^M_{ik}) auf der Kugeloberfläche. *Winkeltreu* heißt: Derselbe Winkel im u-v-Raum wie zwischen den zugehörigen Bildern der Tangentenvektoren an die Kugeloberfläche. Die Längen dürfen sich dabei ändern. Das gibt die Forderung $g^M_{ik}(u,v) = \mu(u,v)\delta_{ik}$ i,k=u,v. Dabei darf μ(u,v)>0 eine beliebige glatte Funktion sein. Begründen Sie das genauer und bestimmen Sie über diese Forderung g.