Übungen Höhere Mathematik III Nr.7. / 28.11.03

Anwesenheitsübung: 1) und $\Gamma-$Funktion

■ 1) **Zum Mittelwertbegriff**: Gegeben ein Ursprungskreis mit Radius R. In dessen Innerem liege ein Punkt P mit Abstand a zum Ursprung. (Wie sollte man daher das Koordinatensystem legen?)

a) Es sollen zwei Formeln für den *mittleren Abstand des Punktes P zum Kreisrand aufgestellt werden.* Die erste gehört zu folgender Interpretation

- Auf dem Kreis läuft eine zweiter Punkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um: Bestimmen Sie den Mittelwert des Punktabstandes für einen Umlauf. Endform?

Die zweite Formel gehört zu folgender Interpretation

- In P drehe sich ein Radargerät mit konstanter Winkelgeschwindigkeit: Bestimmen Sie den Mittelwert des Abstandes für einen Umlauf. Endform?

b) Wie läßt sich der Integrationsbereich mit Hilfe der Additivität verkleinern? (Das sollte man tun.)

c) Berechnen Sie den Wert des Integrales für zwei naheliegende Extremfälle von a.

d) In P befinde sich jetzt ein Massenpunkt der Masse M. Auf dem Kreisrand sei eine zweite Masse mit konstanter Liniendichte σ verteilt. Wie groß ist die Gravitationskraft, die auf P ausgeübt wird? (Integralformel). Was ist, wenn σ nicht konstant ist?

f) In P rotiert ein Massensprühgerät mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Das Gerät sprüht jeweils nur in eine Richtung, aber eine konstante Menge pro Zeiteinheit. Welche Massenliniendichte entsteht auf dem Kreis?

■ 2) Wie steht es mit der **Konvergenz bzw. Divergenz** der folgenden Integrale im Sinne von Lebesgue. Dabei sind $\alpha, \beta, ...$reelle äußere Parameter. Ebenso m>0. Meist sind die Integrale für gewisse dieser Parameter konvergent, für andere divergent. U.U. bleibt ein unklarer Rest. Analysieren Sie die Integrabilität mit der im Skriptum beschriebenen Stategie bzw. durch explizite Berechnung des Integrales

Antwortbeispiel. $\mathrm{I}_1(\alpha) = \int_0^1 dx x^\alpha$ Antwort: $|\mathrm{x}^\alpha| = x^\alpha$. Direkte Berechnung zeigt: $\mathrm{I}_1(\alpha)$ existiert für $\alpha > -1$. Divergent für $\alpha \leq -1$.

$\mathrm{I}_1(\alpha) = ..$	$\mathrm{I}_2(\alpha) = \int_1^\infty dx x^\alpha$	$\mathrm{J}(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^\alpha \ln^\beta(x)$
$\mathrm{K}(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(m^2+x^2)^\alpha}$	$\mathrm{K}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{i\beta t} t^\beta dt}{(m^2+t^4)^\alpha}$	$\Gamma(x) = \int_0^1 dt \left(\ln(\frac{1}{t})\right)^{x-1}$
$\mathrm{L}=\int_0^1 \frac{dx \ln x}{1+x}$	$\mathrm{S}(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^\alpha \sin^\beta(x)$	

■ Setze $\mathrm{f}_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a) Berechnen Sie $\mathrm{I}_n = \int_{\mathbb{R}} dx f_n(x)$.

b) Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Funktionsfolge $\mathrm{n} \mapsto f_n$ (Punktweise Konvergenz? Wogegen? Gleichmäßige Konvergenz? L^1-Konvergenz?)

c) Wofür liefert das ein Beispiel bzw. Gegenbeipiel? Wieso sind das monotone und das dominierte Konvergenztheorem nicht anwendbar?

d) Dieselben Fragen für $\mathrm{g}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{für -n} \leq x \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

■ 4) Welche Stelle der folgenden Rechnung ist zu rechtfertigen? Damit ist nicht die Auswertung der Reihe gemeint!

$\int_0^1 \frac{dx \ln(x)}{1+x} = \int_0^1 dx \ln x \Sigma_{k=0}^\infty (-1)^k x^k = \Sigma_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^1 dx x^n \ln x = -\Sigma_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Wieso ist dieser Schritt zulässig?

■ 5) Zur $\Gamma-$Funktion. Eine Vielzahl von Integralproblemen führt auf die Γ-Funktion von Euler. Einige wichtige Definitionen und zugehörige Resultate seien nachfolgende zusammengestellt:

a) Der Einstieg kann über die folgende Integraldarstellung erfolgen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^t t^{z-1}$$

Für welche z$\in \mathbb{C}$ konvergiert das Integral?
b) Zeigen Sie $\Gamma(n) = (n-1)!$ für n=1,2,.
c) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
d) Wieso kann man das Resultat aus $\mathbb{C}$ zur Fortsetzung der Funktion"verwenden? Was folgt?
e) Beweisen Sie $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Hinweis: $\int_0^\infty d^2x\ \mathrm{e}^{-\vec{x}^2}$ auf zwei Weisen berechnen!). Was ist $\Gamma(-\frac{1}{2})$ und $\Gamma(\frac{5}{2})$?

f) Wählen Sie z=x$\in \mathbb{R}$. Bringen Sie den Integranden in die Form $\mathrm{e}^{-f(t,x)}$. Bestimmen Sie das Maximum t_0 von t$\mapsto f(t,x)$ und ersetzen Sie dann f(t,x) durch das Taylorpolynom 2. Ordnung um t_0. Vergrößern Sie den Integrationsbereich von $\int_0^\infty dt$ auf $\int_{-\infty}^\infty dt$... Berechnen Sie das entstehende Integral und gewinnen Sie so Stirlings Formel

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$$

Machen Sie einige zugehörige numerische Tests. Begründen Sie (heuristisch) die Gültigkeit der gemachten Näherungen