Übungen Höhere Mathematik III Nr.5 15.11.03

- 1) Es sei E$\neq \emptyset$ **endliche** Menge. Ist dann eine Algebra über E automatisch eine $\sigma-$Algebra?
- 2) Es E=$\mathbb{N}$. Wir setzen für jede endliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$:

$$\zeta(A) = \#A = \text{"Anzahl der Elemente von A"}.$$

Zeigen Sie kurz, daß das Theorem von Hahn anwendbar ist.

a) Was ist, wenn man stattdessen E=$\mathbb{R}$ wählt?

- 3) Ist die Konstruktion der nicht meßbaren Menge verstanden? Führen Sie folgende Vergleichskonstruktion durch. Geben Sie jeweils nur kurz das Resultat.

Sei E={1,2,3,...70}. Bilden Sie darin die Äquivalenzrelation

$$n \sim m \Longleftrightarrow (n-m) \text{ ist durch 7 teilbar.}$$

Wählen Sie eine Vertretermenge V der Klassen aus. Und zu jedem v$\in V$ bilden Sie die Menge

$$V_k = \{n|n = k + 7z,\ \text{wobei -10} \leq z \leq 10 \text{ und z} \in \mathbb{Z}\}$$

Welche Ungleichung ergibt sich für $\zeta(V)$, wenn ζ das Zählmaß aus 3) ist? Was ist anders als im Beispiel der Vitalimenge?

- 4) Beweisen Sie: Es sei $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra und M,N$\in \mathfrak{M}$.

$$\text{Dann gilt auch } M\Delta N = (M-N) \cup (N-M) \in \mathfrak{M}.$$

Wie läßt sich diese Menge charakterisieren?

- 5) Zeigen Sie: Es sei E endliche Menge.

a) Dann bestimmt jede σ-Algebra von E in naheliegender Weise eine Partition (=disjunkte Zerlegung) von E. Deren Klassen sind die "Atome" der σ-Algebra, derart, daß die Potenzmenge der Klassen isomorph zur σ-Algebra ist.

b) Umgekehrt liefert jede Partition von E eine σ-Algebra, deren Partition nach a) gleich der gegebenen Partition ist.

Damit hat man eine vollständige Übersicht über die σ-Algebren endlicher Mengen.

c) Die Resultate aus a) und b) legen eine einfache Methode nahe, Maße auf den σ-Algebren von E festzulegen. Wie sieht diese Methode aus? Insbesondere: Wieviele unterschiedliche Maße gibt es zu einer solchen σ-Algebra?

d) Sei jetzt (E,$\mathfrak{M}$, μ) ein so entstandener Maßraum und V Banachraum. Wann ist eine Abbildung f:E $\rightarrow V$ Stufenabbildung? Wieso sind hier (E endlich!) nicht immer alle f Stufenabbildungen?

- 6) E endlich und $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra über E. Wir betrachten auf $\mathfrak{M}$ die beiden Verknüpfungen $\cap$ und Δ, wobei Δ oben in 4) eingeführt wurde.

  Zeigen Sie: Dann ist ($\mathfrak{M}$,$\Delta, \cap$) ein Ring im Sinne der Algebra. Dabei übernimmt Δ die Rolle der Addition und $\cap$ die der Multiplikation.