Höhere Mathematik III Übung Nr.3
31.11.2003
Hausaufgaben: 2.-4.)

■ 1.) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen und das Energiefeld $\overline{H}(t,\vec{x},\vec{v})$. In welchen Fällen liegt ein Bewegungsintegral vor? Bestimmen Sie - sofern möglich - die Hamiltonfunktion H(t,$\vec{x}$,$\vec{p}$) und die kanonischen Gleichungen. (L_1 beispielsweise geht!)

$L_1(t,\vec{x},\vec{v}) = t(\vec{v}^2)^2 + \alpha\vec{x}^2$	$L_2 = t\vec{x}^2\vec{v}^2$	$L_3 = (\vec{v}+\vec{x})^2$
$L_4 = (\vec{x}\cdot\vec{v})$	$L_5(t,x,v) = x\sqrt{1+v^2}$	$L_6 = \lvert\vec{v}\rvert\sqrt{1+\vec{x}^2}$

■ 2) In einem inhomogenen Medium besitzt Licht u.U.eine ortsabhängige Geschwindigkeit. Wir betrachten den Fall, dass der Betrag der Geschwindigkeit eine Funktion des Ortes ist, also durch ein skalares Feld $\vec{x}^K$ =(x,y,z)$\mapsto c(\vec{x}^K) = c(x,y,z)$ festgelegt wird. Das Licht idealisieren wir im Rahmen der geometrischen Optik durch die Bewegung von Lichtpartikeln.

a) Zur Zeit t_1 befinde sich ein Lichtpartikel am Orte $\vec{r}_1$ und zur Zeit t_2 in $\vec{r}_2$. Bestimmen Sie das Funktional T[$\vec{r}$], das die zugehörige Flugzeit entlang der Bahn $\vec{r}$ festlegt. (Das Fermatsche Prinzip besagt: Die physikalische Bahn gehört zur kürzesten Flugzeit!)

b) Gehen Sie analog zur Brachistochronendiskussion zu einer Darstellung in einer Ebene über, für die die Bahn durch x$\mapsto y(x)$ beschrieben werden kann. Wie sieht das Funktional aus? Kommt es Ihnen bekannt vor?

c) Leiten Sie jetzt das Snelliussche Brechungsgesetz her! Achtung: Hier ist L unstetig. Das Integral in zwei Teile zerlegen. Die Rechnhung ist dann elementar, doch nicht ganz kurz und lohnt sich wegen des Resultates .

d) Jetzt sei U=$\{$(x,y)|y>0$\}\subset \mathbb{R}^2_K$ die obere Halbebene. Betrachten Sie dort das folgende Geschwindigkeitsfeld c(x,y)=y. Überlegen Sie sich zunächst qualitativ, wie die Lichtwege in etwa aussehen sollten! Zur Interpretation dieses rohen Modelles: c=$\frac{1}{\text{Brechungsindex}} \sim \frac{1}{Dichte} \sim \frac{1}{Höhe}$.

e) Bestimmen Sie anschließend die Extremalen des Funktionals aus d) (Bewegungsintegral?) Welche Punkte von U lassen sich durch eine Extremale verbinden, welche nicht?

■ 3) Es kommt durchaus vor, das zwei Punkte durch mehr als eine Extremale verbunden werden können. Mann muss dann fallspezifisch untersuchen, wie die zugehörigen Extremwerteigenschaften aussehen. Die Aufgabe soll das Auftreten derartiger Fälle mit Abweichen vom Idealverhalten aufzeigen. Sie enthält zwei Beispiele jeweils mit n=1.

a) L(t,x,v)=$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2x^2$. Sie können die Extremalen ohne Rechnung hinschreiben. Welche Extremalen verbinden (0,0) mit (T,H). Hierbe sei T=$\frac{2\pi}{\omega_0}$ die übliche Schwingungsdauer. Unterscheiden Sie die Fälle H=0 und H$\neq$ 0.

b) L(t,x,v)=$\frac{x}{v^2}$. Bestimmen Sie alle Extremalen, die durch (0,x_1) mit $x_1 > 0$ gehen. Zeigen Sie, dass durch jeden Punkt (T,X) mit T,X>0 genau zwei Extremalen gehen. Wie sieht der zugehörige Funktionalwert aus?

■ 4) Sei A reelle symmetrische n×n-Matrix und Q=($\mathbb{R}^n, \vec{x}\mapsto (A.\vec{x})\cdot\vec{x}, \mathbb{R}$) die damit gebildete quadratische Form. $\vec{x}\cdot\vec{y}$ ist das übliche euklidische Skalarprodukt.

a) Lösen Sie das folgende Extremwertproblem mit Nebenbedingung: "Extremwert für Q unter der Bedingung $\vec{x}^2 = 1$".

b) Was besagt das Resultat für die Operatornorm $||A||_{Op} = \sup_{||\vec{x}||=1} ||A.\vec{x}||$?

c) Welche Strategie bietet sich zur numerischen Bestimmung von Eigenwerten an?

Bemerkung: a) verlangt eine allgemeine Antwort. "Etwa Lösung sind alle Vektoren mit der Eigenschaft xyz." Und Sie sollen diese eigenschaft finden.

■ 5) In der y-z-Ebene befinde sich eine im Ursprung fixierte Stange ("Wippe"), deren Neigungswinkel θ zur horizontalen y-Achse periodisch bewegt wird: $\theta(t) = A\sin(\omega t)$. Auf der Stange selbst kann sich ein Massenpunkt reibungsfrei bewegen. Zusätzlich wirke eine Schwerkraft in negativer z-Richtung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichung für die z-Koordinate und dann für den Abstan vom Ursprung.

■ 6) Führen Sie die Rechnungen aus (10.14) und (10.15) aus