Höhere Mathematik III Übung Nr.2

1. u. 2. Hausaufgaben

■ 1) **Das Geodätenproblem für den Zylindermantel**

a) Verifizieren Sie die im Skriptum hierzu gegebene Lagrangefunktion.

b) Bestimmen Sie den Satz der zugehörigen Beschreibungsgrößen, also $\vec{p} = L_{\vec{v}}$, H und die ELG. Dazu (L_{vv}) sowie det (L_{vv}). Was besagen die Resultate zu H und detL_{vv}?

c) Bestimmen Sie die Geodäten direkt durch eine geometrische Überlegung.

d) Bestimmen Sie die Lösungen nun mit Hilfe der ELG. Als Zwischenschritt sollten Sie $R^2\dot{\varphi}^2(t)+\dot{H}^2(t) = const.$ zeigen. Was folgt damit?

■ 2) $L(t,x,v)=tv^3$ für N=1 und zunächst t>0.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Extremalen. (Gilt ein Erhaltungssatz?)

b) Bestimmen Sie alle Extremalen, die durch (t_0, x_0) gehen mit $t_0 > 0$.

c) Bestimmen Sie alle Extremalen, die durch (t_0, x_0) und (t_1, x_1) gehen mit $t_1 > t_0$. Das sind die Kandidaten für die Lösung des zugehörigen Variationsproblems.

d) Was geschieht, wenn man die Bedingung t>0 fallen läßt?

e) Kann man etwas über den Wert des Funktionales für die Extremalen aus c) aussagen? Fixieren Sie den Anfangswert (t_0, x_0) und bestimmen Sie das zugehörige Steigungsfeld $(x,y)\mapsto m(x,y)$ (Gleich Steigung der durch (t_0, x_0) und (t, x) gehenden Exztremalen in (t,x)) sowie das entsprechende Wirkungsfeld S(t,x) (gleich Wirkung der (t_0, x_0) und (t,x) verbindenden Extremalen).

f) Zeigen Sie, dass bezüglich der straken Norm kein Extremwert vorliegen kann!

■ 3) Bestimmen Sie das Funktional des kürzesten Abstandes auf einem Kegelmantel. Dann dasselbe für die Torusoberfläche.

■ 4) $L(t,x_1,x_2,v_1,v_2)=\frac{m}{2}\left(v_1^2+v_2^2\right)-\frac{k}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)$

a) ELG nebst Lösung

b) Das Energiefeld? Was für eine geometrische Figur bilden die zugehörigen Energiehyperflächen (im Phasenraum)?

c) Aber hier sind auch beide Einzelenergien erhalten. Zeigen Sie das. Auf was für eine Figur wird die Bewegung der Lösungskurve jetzt eingeschränkt?