■ 1H) Ein **Übertragungsproblem**: Es sei (G,$\top$) eine Gruppe. Für A,B$\subset G$ definieren wir

$$A\overline{\top}B = \{g|g \in G, \exists x \in A, \exists y \in B, g = x \top y\}.$$

Definiert das auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ eine Halbgruppenstruktur? Oder gar erneut eine Gruppenstruktur?

Welche Beziehung besteht zwischen $\overline{\top}$ und der Potenzmengenerweiterung $\underline{\top}$ aus Kap. 1.2? (Hinweis: Vergleichen Sie die Urbildmengen!)

1. ▼ Zweckmäßig schreibt man
$$A\overline{\top}B = \{a \top b|a \in A, b \in B\}.$$
Dann ergibt sich aus der Assoziativität der Gruppe unmittelbar die Mengengleichheit
$$(A\overline{\top}B)\,\overline{\top}C = A\overline{\top}\,(B\overline{\top}C)\,.$$
Denn ein Element der linken Seite hat die Gestalt $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ und ist damit Element der rechten Seite, und umgekehrt. Offenbar ist $\{e\}$ mit dem neutralen Element $e \in G$ neutrales Element unserer Struktur. **D.h. eine Halbgruppe liegt vor.** Aber bereits in der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen e, a hat man kein Inverses B zu $\{e, a\}$, da ein solches a enthalten müsste und damit auch $a = ae \in B\overline{\top}\ \{e, a\}$wäre. (Hier ist schlecht argumentiert worden: Es ist für ein Gegenbeispiel B nicht etwa nur zu zeigen, dass **ein** denkbarer Kandidat für ein Inverses zu B durchfällt, sondern dass **alle** *Kandidaten durchfallen müssen.*) Schließlich: Der **Urbildbereich** von $\overline{\top}$ ist $\mathcal{P}(G) \times \mathcal{P}(G)$, und das ist i.a. als eine echte Teilmenge von $\mathcal{P}(G \times G)$ dem Urbildbereich von $\underline{\top}$ aufzufassen, etwa über die Zuordnung $(A, B) \mapsto A \times B$ - denn nicht jede Menge von Gitterpunkten ist ein Rechteck. Man sieht das auch an den Anzahlen: Hat G drei Elemente, so hat erstere Menge 2^6 Elemente, letztere aber 2^9. Oder: Nicht jede Menge von Gitterpunkten ist ein Rechteck von Gitterpunkten. Aber $\overline{\top}$ ist die **Restriktion** von $\underline{\top}$ auf diese kleinere Menge.

#####

■ 2H) **Beweise:** (G,·) und (H,$*$) seien Gruppen. Weiter sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt: Ist V Untergruppe von H, dann ist $\overset{-1}{\underline{\varphi}}(V)$ eine Untergruppe von G.

▼ Das Urbild von V enthält das neutrale Element e von G, da V das neutrale Element von H enthält, auf das e abgebildet wird. Weiter ist mit $\varphi(a) = v$, $\varphi(b) = w$, $v, w \in V$, auch $\varphi(a^{-1}b) = v^{-1}w \in V$, also ist $a^{-1}b$ im Urbild von V, wenn a und b es sind. Daher ist nach Untergruppenkriterium $\underline{\varphi}^{-1}(V)$ eine Untergruppe von G. ▲ (Auch hier wurde schlecht argumentiert, indem man fälschlich die Existenz einer inversen Abbildung φ^{-1} zu φ voraussetzte und damit ein viel spezielleres Resultat nur erhielt. Man scheiterte letztlich daran, das Untergruppenkriterium für den speziell vorliegenden Fall zu konkretisieren und eine Bedingung wie '$a \in \underline{\varphi}^{-1}(V)$' zu explizieren durch '$\varphi(a) \in V$'.)

######

■ 3H) Es sei (G,·) = ({1,g},·) isomorph zur zyklischen Gruppe von 2 Elementen, wobei 1 neutral sein soll. Wie sieht die zugehörige Gruppentafel aus?

a) Geben Sie für die Produktgruppe G$\times G$ die Gruppentafel an. Ist diese Gruppe kommutativ?

b) Beweisen Sie, dass G$\times G$ nicht isomorph zur zyklischen Gruppe von 4 Elementen ist.

c) Sei M={a,b} eine zweielementige Menge. Bilden Sie die Menge $\mathcal{F}(M, G)$ aller Abbildungen von M in obiges G. Durch Wertemengenübertragung wird daraus eine Gruppe. Bestimmen Sie die Gruppentafel und zeigen Sie, dass auch diese Gruppe isomorph zu G$\times G$ ist.

▼ a)

	(1,1)	(1,g)	(g,1)	(g,g)
(1,1)	(1,1)	(1,g)	(g,1)	(g,g)
(1,g)	(1,g)	(1,1)	(g,g)	(g,1)
(g,1)	(g,1)	(g,g)	(1,1)	(1,g)
(g,g)	(g,g)	(g,1)	(1,g)	(1,1)

▼ b) Sei $H = \{e, a, a^2, a^3\}$ zyklische Gruppe der Ordnung 4. Wäre f ein Isomorphismus von H auf $G \times G$, so wäre $f(a^2) = f(a)f(a) = (1,1)$. Denn jedes Element von $G \times G$ hat die Ordnung 2, wenn es nicht das neutrale ist. Also $f(a^2) = f(e)$, aber $a^2 \neq e$. f wäre also nicht bijektiv.

▼c) Bezeichnen wir die Elemente von $\mathcal{F}(M, G)$ zweckmäßig mit $f_{(g_1,g_2)}$ für $f(a) = g_1, f(b) = g_2$, so ergibt $\Phi : (g_1, g_2) \mapsto f_{(g_1,g_2)}$ unmittelbar einen Isomorphismus von $G \times G$ in die Gruppe der Abbildungen. Wir überlegen nur, dass die Isomorphieforderung (Bijektivität ist klar) gerade der Definition der Gruppenstruktur auf $\mathcal{F}(M, G)$ durch Wertmengenübertragung entspricht:

$$f_{(g_1,g_2)} \top f_{(h_1,h_2)} = f_{(g_1h_1,g_2h_2)}$$

So muss die Gruppenoperation lauten, damit Φ Isomorphismus wird. Aber das bedeutet gerade:

$$\begin{aligned} \left(f_{(g_1,g_2)} \top f_{(h_1,h_2)}\right)(a) &= g_1h_1 = f_{(g_1,g_2)}(a)f_{(h_1,h_2)}(a) \text{ und} \\ \left(f_{(g_1,g_2)} \top f_{(h_1,h_2)}\right)(b) &= g_2h_2 = f_{(g_1,g_2)}(b)f_{(h_1,h_2)}(b). \end{aligned}$$

Für die Gruppentafel schreibe man nur $f_{(g_1,g_2)}$ statt (g_1, g_2) in der Gruppentafel zu $G \times G$. (Dies wurde eigentlich ganz gut eingesehen, aber man scheiterte unnötig daran, die Elemente von $\mathcal{F}(M, G)$ geeignet zu **bezeichnen**.)

####

■ 4H) Sei f=$\left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1x + 3y \\ 2x + 6y \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2\right)$.

Zeigen Sie (kurz!) dass diese Abbildung bezüglich der Addition ($\mathbb{R}^2$.+) strukturerhaltend ist.
Bestimmen Sie Kern(f) und Bild(f).

▼Es handelt sich um einen Vektorraumhomomorphismus (nach der Inspektionsregel "Jeder Summand enthält genau einen Komponentenfaktor". Allerdings ist das kein Isomorphismus, da $Kern(f) = \{\lambda(3, -1) \,|\lambda \in \mathbb{R}\}$ und $Bild(f) = \{\lambda(1, 2) \,|\lambda \in \mathbb{R}\}$. Das sind beides Geraden.

####

■ 5H) Sei $n = km$ mit k,m,n$\in \mathbb{N} - \{0\}$. Weiter seien $(\mathrm{C}_n, \cdot)$ und $(\mathrm{C}_k, \cdot)$ die zugehörigen zyklischen Gruppen. Denken Sie daran, dass $\mathrm{C}_n = \{\sigma^r | r = 0, 1, ..., n-1\}$ ist. Wir bilden die Abbildung

$$\mu_m = (C_n, g \mapsto g^m, C_n).$$

Zeigen Sie dass μ_m ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie Kern und Bild von μ_m. Sind das erneut zyklische Gruppen?

Welche Untergruppen von C_{12} erhalten Sie als Konsequenz dieses Resultates?

▼ Da die Gruppe kommutativ ist, gilt $(gh)^m = g^m h^m$ für $g, h \in C_n$. Ferner ist $e^m = e = \sigma^0$ für das neutrale Element. Also ist μ_m Gruppenhomomorphismus. Sei $n = mk$. Dann ist $Bild\,(\mu_m) = \{\sigma^{rm} | r \in \mathbb{N},\ 0 \leq r \leq k-1\}$, und $\boxed{Kern\,(\mu_m) = Bild\,(\mu_k)}$. Denn $\left(g^k\right)^m = g^n = e$. Oder auch der Kern von μ_m mittels des erzeugenden Elements aufgeschrieben: $Kern\,(\mu_m) = \{\sigma^{sk} | 0 \leq s \leq m-1\}$.

Im Falle von C_{12} findet man folgende nichttriviale Untergruppen - für jeden echten Teiler von 12:

$$\left\{e, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^6, \sigma^8, \sigma^{10}\right\}, \qquad \left\{e, \sigma^3, \sigma^6, \sigma^9\right\}, \qquad \left\{e, \sigma^4, \sigma^8\right\}, \qquad \left\{e, \sigma^6\right\}.$$

######

■ 6H) Es sei R:$V_0^3 \to V_0^3$ ein Drehung im Sinne des Skriptums. Die Definition (2.6.4) verlangt nicht, dass R strukturerhaltend für $(V_0^3, +)$ ist. Beweisen Sie, dass R sogar Isomorphismus ist. (Hinweis: Berechnen Sie

$$\begin{aligned} & (R(\vec{x}+\vec{y}) - R(\vec{x}) - R(\vec{y}))^2 \\ = \; & (R(\vec{x}+\vec{y}) - R(\vec{x}) - R(\vec{y})) \cdot (R(\vec{x}+\vec{y}) - R(\vec{x}) - R(\vec{y})) \end{aligned}$$

und interpretieren Sie das Resultat.)

▼ Man rechnet aus unter Benutzung der Allgemeingültigkeit von $(R\vec{x}) \cdot (R\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ und der Eigenschaften des Skalarprodukts (Bilinearität!):

$$\begin{aligned} (R(\vec{x}+\vec{y}) - R\vec{x} - R\vec{y})^2 &= (R(\vec{x}+\vec{y}))^2 + (R\vec{x})^2 + 2R\vec{x}R\vec{y} + (R\vec{y})^2 - 2R(\vec{x}+\vec{y})(R\vec{x}+R\vec{y}) \\ &= (\vec{x}+\vec{y})^2 + \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2\vec{x}\vec{y} - 2R(\vec{x}+\vec{y})R\vec{x} - 2R(\vec{x}+\vec{y})R\vec{y} \\ &= 2(\vec{x}+\vec{y})^2 - 2(\vec{x}+\vec{y})\vec{x} - 2(\vec{x}+\vec{y})\vec{y} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort allgemein, dass $R(\vec{x}+\vec{y}) - R\vec{x} - R\vec{y} = 0$, also $R(\vec{x}+\vec{y}) = R\vec{x} + R\vec{y}$. Ebenso ergibt sich

$$(R(\lambda\vec{x}) - \lambda R\vec{x})^2 = (R(\lambda\vec{x}))^2 + \lambda^2 (R\vec{x})^2 - 2\lambda R(\lambda\vec{x}) R\vec{x} = (\lambda\vec{x})^2 + \lambda^2\vec{x}^2 - 2\lambda(\lambda\vec{x}\vec{x}) = 0.$$

Also folgt, dass R ein Vektorraumhomomorphismus ist.

######

■ 7H) Sei f(x)=$\frac{1}{1+x}$. Verifizieren Sie $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1-x}{x}$.

Definieren Sie induktiv $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ und $f_{n-1}(x) = \overset{-1}{f}(f_n(x))$. Damit ist für jedes n$\in \mathbb{Z}$ eine rationale Funktion f_n definiert.

a) Welches Wohldefiniertheitsproblem besteht?

b) Zeigen Sie, dass f_n(x) die folgende Form hat

$$f_n(x) = \frac{\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}x}{\alpha_n + \alpha_{n-1}x} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c} \alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{array} \quad \text{für alle n} \in \mathbb{Z}.$$

c) Wie sind die "Anfangswerte" $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ zu wählen?

d) Wieso wird hierdurch eine Gruppe definiert?

e) Führen Sie (für n>0) eine Kurvendiskussion für x$\mapsto f_n(x)$ aus. Bestimmen Sie insbesondere alle Fixpunkte, also alle x-Werte für die $f_n(x) = x$ gilt. (Das ist leicht!).

f) Welches Konvergenzverhalten zeigen die Folgen n$\mapsto f_n(x)$, wenn x$\in \mathbb{R}$ äußerer Parameter ist?

▼ a) Man hat zweckmäßig zu fixieren: $f_0(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, also $f_0 =$ Identität. Überdies ist $f_n(x) = f(f_{n-1}(x)) = f^{-1}(f_{n+1}(x))$ für alle n erfüllt.

▼ b) Wir beweisen induktiv folgende Behauptung: Der Ausdruck für f_n hat die Gestalt $\boxed{\frac{a_{n-1}+a_{n-2}x}{a_n+a_{n-1}x}}$, und es gilt $\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-1}}$. Induktionsanfang: f_0 hat die verlangte Gestalt, und zwar mit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 1$, $a_0 = 1$, und es gilt $a_0 = a_{-1} + a_{-2}$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f(f_n(x)) = \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}+a_{n-2}x}{a_n+a_{n-1}x}} \text{ (nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{a_n + a_{n-1}x}{a_n + a_{n-1} + (a_{n-1} + a_{n-2}x)} = \frac{a_n + a_{n-1}x}{a_n + a_{n-1} + a_n x}, \end{aligned}$$

also hat f_{n+1} die verlangte Gestalt, und zwar mit $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Nunmehr zeigen wir induktiv: $f_{-k}(x) = \frac{a_{-k-1}+a_{-k-2}x}{a_{-k}+a_{-k-1}x}$, und $a_{-k-2} =$

$a_{-k} - a_{-k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Nun ist das gültig für $k = 0$, und der Induktionsschritt ist mittels Anwendung von f^{-1} zu machen:

$$\begin{aligned} f_{-k-1}(x) &= \frac{1 - f_{-k}(x)}{f_{-k}(x)} = \frac{a_{-k} + a_{-k-1}x}{a_{-k-1} + a_{-k-2}x} - 1 = \frac{a_{-k} - a_{-k-1} + (a_{-k-1} - a_{-k-2})\,x}{a_{-k-1} + a_{-k-2}x} \\ &= \frac{a_{-k-2} + (a_{-k-1} - a_{-k-2})\,x}{a_{-k-1} + a_{-k-2}x}. \end{aligned}$$

Das hat die verlangte Gestalt, und zwar mit $a_{-(k+1)-2} = a_{-k-1} - a_{-k-2}$.

▼ c) Man ersieht noch $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ usw. (Fibonacci-Folge). Weiter gilt $a_{-k-2} = (-1)^k a_k$ für $k \geq 1$.

▼ d) Die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{Z}$, bilden eine Gruppe mit der Hintereinanderschaltung als Gruppenmultiplikation und der Identität als neutralem Element. Assoziativität ist klar mit $(k \circ g) \circ f = k \circ (g \circ f)$ wie stets bei Hintereinanderschaltung von Abbildungen. f_{-n} ist invers zu f_n, und $n \mapsto f_n$ ergibt Isomorphie zur Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

▼ e) Jetzt zum **Grenzwertverhalten** von n$\mapsto$ $f_n(x)$. Zunächst die **Fixpunkte** von f_n : Die Gleichung $f_n(x) = x$ bedeutet für $a_{n-1} \neq 0$ (für $a_{n-1} = 0$ haben wir $f_0 = id$, und jeder Punkt ist Fixpunkt):

$$x^2 + \frac{a_n - a_{n-2}}{a_{n-1}}x - 1 = x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{mit Lösungen} \quad \boxed{\mathrm{Q}_- = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Q}_+ = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.}$$

Wiederum für $a_{n-1} \neq 0$, also $n \neq 0$, haben wir folgende Termumformungen:

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}x}{a_n + a_{n-1}x} = \frac{1 + \frac{x}{\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)}}{\frac{a_n}{a_{n-1}} + 1} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} - \frac{-a_{n-1}^2 + a_n a_{n-2}}{a_{n-1}\,(a_n + a_{n-1}x)}.$$

- – ∗ Das gibt eine Nullstelle bei $\boxed{x_{0n} = -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$,
  - ∗ einen Pol bei $\boxed{\mathrm{x}_{Pn} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}}$.
  - ∗ Bei x=0 wird die y-Achse bei $\boxed{\mathrm{b}_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$ getroffen.
  - ∗ Und für $x \to \infty$ geht die Funktion gegen $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

Wir sehen: **Überall taucht der Quotient** $\mathrm{q}_n = \frac{a_n}{a_n-1} > 1$ **auf**.

Insbesondere folgt

$$\boxed{\mathrm{f}_n(\mathrm{x}) = \frac{1 + \frac{x}{q_{n-1}}}{q_n + x}}$$

- – Wie verhält sich die Folge n$\mapsto$q$_n$ für n$\to \infty$? Hierzu schreiben wir

$$q_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{oder} \qquad \boxed{\mathrm{q}_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}}\,(*)$$

Die ersten Folgenglieder sind:

q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$
1	2	1.5	1.66..	1.6	1.625	1.615..

Das sieht nach "alternierender Konvergenz" aus!

Angenommen q$_n$ konvergiert gegen einen Grenzwert w, dann ergeben die Grenzwertsätze für festes x$\neq -w$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1 + \frac{x}{w}}{w + x} = \frac{1}{w}\frac{w + x}{w + x} = \frac{1}{w}.$$

- **D.h. die Funktionsfolge konvergiert für jedes x$\neq w$ gegen den konstanten (von x unabhängigen Wert $\frac{1}{w}$.**
- Nullstelle und Pol verschmelzen für n$\to\infty$ bei x=-w.
- Wie groß ist w? Es muss w=1+$\frac{1}{w}$ erfüllen. damit folgt w$^2 = 1 + w$ oder $\boxed{\text{w}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).}$ Wie nehmen diese Wurzel, da wir den Fall w>0 benötigen.
- Man findet sofort, dass $\boxed{\frac{1}{w} = Q_+}$ ist.

Können wir beweisen, dass die Folge der q$_n$ konvergiert?

$\Diamond$ Zunächst ist q$_2$ = 2 und q$_3$ = $\frac{3}{2}$. Induktiv folgt jetzt mit (*), dass dann für alle n>2 erneut $\boxed{1<\text{q}_n < 2}$ gilt. D.h. die Folge ist nach oben beschränkt.

$\Diamond$ Kann sie mehr als einen Häufungspunkt haben? Wir betrachten die beiden Teilfolgen n$\mapsto q_{2n}$ mit q$_2$ = $2 > w$ und q$_n \mapsto q_{2n+1}$ mit q$_1$ = $1 < w$. Es folgt q$_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{q_{n-1}}} = \frac{1+2q_{n-1}}{1+q_{n-1}}$. Also

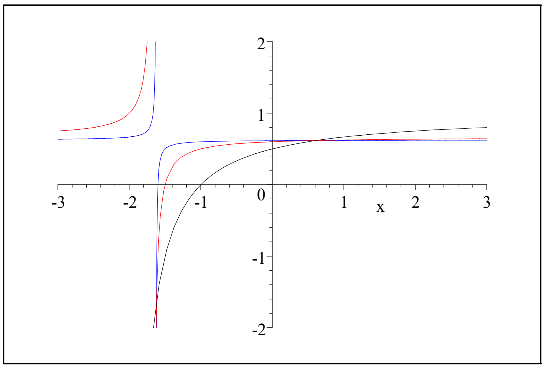
$$\boxed{q_{n+1} = \frac{1+2q_{n-1}}{1+q_{n-1}}}.$$

$\Diamond$ Idee: Wir diskutieren die zugehörige reelle Funktion x$\mapsto d(x) = \frac{1+2x}{1+x}$ für die q$_{n+1} = d(q_{n-1})$ gilt. Für x>0 erfüllt sie d(x)=x genau für x=w, wie man sofort verifiziert. Und es gilt $w<d(x)<x$ für $x>w$ und $x<d(x)<w$ für $x<w$ wie man sofort durch Inspektion mit Hilfe des Graphen sieht.

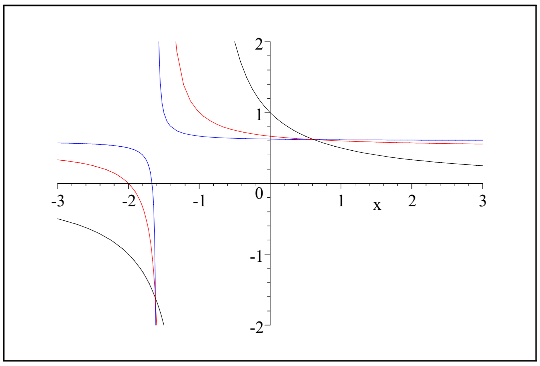
$\Diamond$ Folglich ist n$\mapsto q_{2n}$ eine moton fallende und n$\mapsto q_{2n+1}$ eine monoton wachsende Folge. Beide Folgen sind beschränkt, also konvergent.

$\Diamond$ Und da auch x$\mapsto d(x)$ für x>0 nur den einen Fixpunkt x=w hat, ist das der gemeinsame Grenzwert. n$\mapsto q_n$ konvergiert gegen w.

Die folgenden Bilder zeigen das Verhalten der iterierten Funktionen. Dabei haben wir gerades und ungerades n getrennt. Man sieht unmittelbar, wie das oben hergeleitete Verhalten insgesamt abläuft.

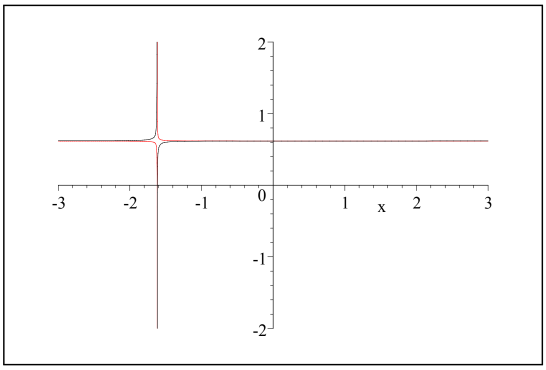


f$_2$, f$_4$ (rot) und f$_6$ (blau)



f$_1$, f$_3$ (rot) und f$_6$ (blau)

Das nächste Bild zeigt die Graphen von f$_8$ und f$_9$ (rot), die das Grenzverhalten bereits gut sichtbar machen.



■ H5) Beweisen Sie die Äquivalenz von Kap.4 (1.1.5) und (1.1.6).

(1.1.5)

	Teilmodulkriterium / Teilraumkriterium
Es sei	M Modul über dem Ring R und $T \subset M$ eine Teilmenge.
Dann	machen die Einschränkungen der beiden Verknüpfungen die Menge T genau dann zu einem Teilmodul, wenn gilt:
i)	$T \neq \emptyset$.
ii)	Mit $x, y \in T$ ist auch $x + y \in T$.
iii)	Mit $\alpha \in R$ und $x \in T$ ist auch $\alpha x \in T$.

(1.1.6) Man kann die Bedingungen ii) und iii) auch gleichwertig wie folgt formulieren:

ii′) mit $\alpha, \beta \in$ R und $x, y \in T$ ist stets auch $(\alpha x + \beta y) \in T$.
"Jede Linearkombination von zwei Vektoren aus T liegt wieder in T "

▼Man beachte die Analogie zum Untergruppenkriterium. Ist eine Teilmenge A eines Moduls M über dem Ring R (Ring mit 1) nicht leer und enthält sie mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (wir bezeichnen hier auch Modulelemente mit Pfeilen) auch stets $\vec{a} + \vec{b}$ sowie $\lambda\vec{a}$ für ein beliebiges $\lambda \in R$, so ist A ein Teilmodul von M.

$\boxed{\text{i)}}$ Zunächst der (nicht geforderte) Beweis von (1.1.5). Die Bedingungen ergeben mit $\lambda = 0$ und einem vorauszusetzenden Element $\vec{a} \in A$ auch $0\vec{a} = \vec{0} \in A$. (Dass $0\vec{a} = \vec{0}$, ergibt sich, wie bereits für Ring oder Vektorraum gesehen, aus $0\vec{a} = (0 + 0)\,\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a}$, also mit Addition von $-0\vec{a}$ hat man $\vec{0} = 0\vec{a}$.) Die andern beiden Bedingungen sichern die Abgeschlossenheit von A unter innerer und äußerer Verknüpfung. Dass auch die benötigen additiven Inversen $-\vec{a}$ zu $\vec{a} \in A$ wieder in A sind, ergibt sich daraus, dass $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$, also Element von A nach der dritten Bedingung. (Für $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$ ist analog zu A1 zu argumentieren.) Nun ist Folgendes entscheidend: Bei allen zu erfüllenden Modulaxiomen handelt es sich um Allaussagen, und da diese in ganz M gelten, gelten sie auch in der Teilmenge A. Darum waren nur die zu erfüllenden Existenzaussagen wichtig zu fordern.

$\boxed{\text{ii)}}$ Zweiter Punkt: Die Äquivalenz von (1.1.5) und (1.1.6) ist zu zeigen. Zunächst seien die Bedingung aus (1.1.6) sei erfüllt. Dann setze man $\alpha = \beta = 1$, sodann $\beta = 0$, α beliebig, um die beiden Bedingungen aus (1.1.5) zu erhalten. Umgekehrt sei (1.1.5) erfüllt. Mit $\vec{a}, \vec{b} \in A$ und $\alpha, \beta \in R$ hat man wegen der Homogenität $\vec{x} = \alpha\vec{a} \in A$ und $\vec{y} = \beta\vec{b} \in A$ und wegen der Additivität auch $\vec{x} + \vec{y} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ in A, wie es (1.1.6) verlangt. Die Forderungen sind gleichwertig.

#####

■ H6) Es sei V ein Vektorraum über dem kommutativen Körper K. Weiter seien U_1 und U_2 Teilräume von V.

a) Beweisen Sie, dass dann auch $U_1 \cap U_2$ Teilraum von V ist. Welche Verallgemeinerung ist zu erwarten?

b) Wieso ist $U_1 \cup U_2$ i.a. kein Teilraum? Statt dessen bilden wir

$$U_1 + U_2 = \{y | y = x_1 + x_2, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$$

Beweisen Sie, dass $U_1 + U_2$ Teilraum von V ist. Man nennt diesen Raum "den von U_1 und U_2 erzeugten Teilraum".

c) Zeigen Sie, dass folgende Charakterisierung dieser beiden Teilräume gilt:

- $U_1 \cap U_2$ ist der größte Teilraum von V, der sowohl in U_1 wie in U_2 enthalten ist.

- $\mathrm{U}_1 + U_2$ ist der kleinste Teilraum, der sowohl U_1 wie auch U_2 enthält.

▼

▼a) Teilraumkriterium: $\vec{0} \in U_1, U_2$, also $\vec{0} \in U_1 \cap U_2$. Mit $\alpha, \beta \in K$ und $\vec{a}, \vec{b} \in U_1 \cap U_2$ hat man $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in U_1$ und $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in U_2$, also $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in U_1 \cap U_2$. Das Teilraumkriterium in der zweiten Formulierung ist demnach erfüllt.

▼b) $U_1 \cup U_2$ ist im allgemeinen kein Teilraum, da mit $\vec{a} \in U_1$ und $\vec{b} \in U_2$ nicht etwa $\vec{a}+\vec{b} \in U_1 \cup U_2$. Gegenbeispiel: Zwei Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2 .mit$ **unterschiedlichen Richtungen**.

Dagegen ist $U_1 + U_2$ Teilraum, weil er $\vec{0}$ enthält mit $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und zudem mit $\vec{a}, \vec{b} \in U_1$ und $\vec{x}, \vec{y} \in U_2$ man folgende Umrechnung in V vornehmen kann

$$\lambda(\vec{a} + \vec{x}) + \mu\left(\vec{b} + \vec{y}\right) = \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) + (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in U_1 + U_2.$$

Dies zeigt: Da das Teilraumkriterium für U_1, U_2 erfüllt ist, ist es das auch für $U_1 + U_2$.

▼ c) $U_1 \cap U_2$ ist schon die größte Menge, die sowohl in U_1 als auch U_2 enthalten ist, also auch der größte Teilraum dieser Art.

Sei W ein Teilraum von V, der sowohl U_1 als auch U_2 enthält. Sei $\vec{a} + \vec{b} \in U_1 + U_2$, mit $\vec{a} \in U_1, \vec{b} \in U_2$, also auch $\vec{a}, \vec{b} \in W$. Dann ist $\vec{a} + \vec{b} \in W$. Somit gilt $U_1 + U_2 \subset W$. Also ist $U_1 + U_2$ der kleinste Teilraum (Teilraum nach b.), der U_1 und U_2 enthält.

#####

■ H7) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in V_0^3$ Vektoren ungleich $\vec{0}$. Wir bilden die folgende Abbildung

$$\varphi = (\mathbb{R}^2, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, V_0^3).$$

Zeigen Sie: (a) φ ist linear, (b) Bestimmen Sie Kernφ und Bildφ. (c) Sei g Gerade mit Parametrisierung $\vec{x}_g(\gamma) = \vec{a} + \gamma\vec{b}$. Bestimmen Sie Bild$(\vec{x}_g)$.

▼

▼a) $\varphi((\alpha + \lambda, \beta + \mu)) = (\alpha + \lambda)\vec{a} + (\beta + \mu)\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \varphi((\alpha, \beta)) + \varphi((\lambda, \mu))$.
Weiter $\varphi(\lambda(\alpha, \beta)) = \varphi((\lambda\alpha, \lambda\beta)) = \lambda\alpha\vec{a} + \lambda\beta\vec{b} = \lambda\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \lambda\varphi((\alpha, \beta))$.

▼ b) **Erster Fall**: Seien $\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig. Dann ist $Kern(\varphi) = \{\vec{0}\} = \{(0,0)\}$, und $Bild(\varphi)$ ist der von $\vec{a}, \vec{b}$ erzeugte Unterraum, geometrisch die Ursprungsebene mit diesen Richtungsvektoren.

Zweiter Fall: Sei $\vec{a} = \lambda_0\vec{b}$. Dann ist $Kern(\varphi) = \{(\alpha, -\lambda_0\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ eindimensionaler Teilraum und $Bild(\varphi) = \{\alpha\vec{b} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ebenfalls eindimensional. Da die Vektoren ungleich $\vec{0}$ sein sollen, sind das alle Fälle.

▼ c) $Bild(\vec{x}_g) = \{\vec{a} + \gamma\vec{b} | \gamma \in \mathbb{R}\}$ ist die Gerade (als Menge der zugehörigen Ortsvektoren) mit Aufpunktvektor $\vec{a}$ und Richtungsvektor $\vec{b}$, wobei sich genau im Falle der linearen Abhängigkeit der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ eine Ursprungsgerade ergibt. Wähle mit $\vec{a} = \lambda_0\vec{b}$ nur $\gamma = -\lambda_0$. (Also bitte begrifflich unterscheiden: g=Bild$\vec{x}_g$ als Teilmenge von V_0^3 und die Parametrisierung $\vec{x}_g$ dieser Geraden)

####

■ H8) Wieviele Punkte enthält eine (beliebige) Gerade im Vektorraum $\mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(5) \times \mathbb{Z}/(5)$ über dem Körper $\mathbb{Z}/(5)$? Beweisen Sie das Resultat? Welche Verallgemeinerungen bieten sich an?

▼ Eine Gerade in diesem Raum hat die Gestalt $\{\vec{x}_0 + \lambda\vec{a} | \lambda \in \mathbb{Z}/(5)\}$, mit festen Vektoren $\vec{x}_0$ und $\vec{a}$. Die Anzahl der Elemente ist also die von $\mathbb{Z}/(5)$, fünf. Völlig analog erhält man für entsprechende Räume der Dimension k über einem endlichen Körper mit p^n Elementen ($n \geq 1$) die Anzahl $(p^n)^k = p^{nk}$.

#####

■ H9) Es sei V reeller Vektorraum und $F \subset V$ eine Teilmenge. Bilden Sie die folgende neue Teilmenge:

$$K_V = \{\vec{x} | \; \vec{x} = \lambda\vec{a}, \; \vec{a} \in F, \; \lambda \in \mathbb{R}, \; 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Welche geometrische Interpretation haben diese Mengen in der Ebene und im Raum? Wie wird man diese Mengen allgemein bezeichnen?

▼ Die Menge

$$K_F = \{\lambda\vec{a} | \vec{a} \in F \text{ und } \lambda \in [0, 1]\}$$

enthält mit jedem Punkt die Verbindungsstrecke von diesem zum Ursprung, so dass man sie mit Recht '**sternförmig**' nennen kann. Im Dreidimensionalen wird man je nach Menge F vielfach unregelmäßige **Kegel** zu sehen bekommen. Speziell für eine geschlossene Kurve um den Ursprung in der Ebene erhält man die eingeschlossene Fläche, im Raum etwa zu einer Randfläche den eingeschlossenen Körper. Im doppelpunktfreien Fall ist das besonders leicht zu sehen, bei Doppelpunkten ergeben sich unter Umständen Auffüllungen von Löchern. Man beachte $K_{K_F} = K_F$. K ist also so etwas wie ein 'Hüllenoperator'.

#####

■ H10*) Eine Übung im sorgfältigen Denken: Es sei $V^* = (V_0^3 - \{\vec{0}\}) \times V^3$ der Phasenraum eines Massenpunktes (ohne den Ursprung des Konfigurationsraumes). Wir betrachten die beiden Felder

$$T = (V^*, (\vec{x}, \vec{v}) \mapsto \frac{m}{2}\vec{v}^2, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad U = (V^*, (\vec{x}, \vec{v}) \mapsto \frac{G}{|\vec{x}|}, \mathbb{R}).$$

Weiter sei $\vec{r} = (\mathbb{R}, \vec{e}_1 R\cos(\omega t) + \vec{e}_2 R\sin(\omega t), V_0^3)$ eine Bahnkurve im Konfigurationsraum (R>0). Hierzu gehört eine Phasenraumkurve $\vec{s} = (\mathbb{R}, t \mapsto (\vec{r}(t), \vec{v}(t)), V^*)$. Bestimmen Sie diese genauer. R und ω sind Parameter.

Bilden Sie jetzt die Abbildungen E=T+U und e=E$\circ\vec{s}$. Erfüllen alle diese Bahnkurven $\vec{r}$ den Energiesatz? Kann das sein? Was verlangen die Newtonschen Axiome? Was läßt sich in diesem Fall über die Arbeit entlang einem Kreisumlauf sagen?

▼

$$\begin{aligned} \vec{s} &= (\mathbb{R}, t \mapsto \vec{s}(t), V^*) \\ \vec{s}(t) &= (\vec{e}_1 R\cos(\omega t) + \vec{e}_2 R\sin(\omega t), \vec{e}_1(-R\omega\sin(\omega t)) + \vec{e}_2 R\omega\cos(\omega t)) \end{aligned}$$

$E(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{G}{|\vec{x}|}$. Das Skalarfeld E hat auf der Bahnkurve $\vec{r}$ den konstanten Wert

$$\boxed{E \circ \vec{s}(t) = \frac{m}{2}R^2\omega^2 + \frac{G}{R} \text{ oder } E \circ \vec{s} = \left(\mathbb{R}, t \mapsto \frac{m}{2}R^2\omega^2 + \frac{G}{R}, \mathbb{R}\right)}$$

D.h. jede derartige Kreisbewegung erfüllt den Energiesatz! Das steht sicher im Widerspruch zum dritten Keppleerschen Gesetz, nach dem der Radius die Winkelgeschwindigkeit festlegt.

Die Ursache: Im konservativen Kraftfeld ist die Energieerhaltung **nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für eine physikalische Bewegung.**

Der Grund, dass alle Kreisbewegungen den Energiesatz erfüllen, kann man noch genauer klären: Man erhält den Energisatz, indem man die Newtonsche Gleichung $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$ skalar mit $\vec{v}(t)$ multipliziert. Bei unserer Kreisbewegung steht aber $\vec{v}$ stets auf beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{F}$ Termen senkrecht. Damit wird aus der nichttrivialen Newtonschen Bewegungsgleichung, die die physikalische Bewegung festlegt, die triviale Bedingung 0=0. Und aus der kann natürlich alles mögliche folgen, das keinen Bezug mehr zum physikalischen System hat.