Lösungen zum 6. Übungsblatt

1. Die Teilfolge $(a_{3k})_k$ konvergiert nach 2, die Teilfolge $(a_{3k+1})_k$ konvergiert nach Null, und die Teilfolge $(a_{3k+2})_k$ hat den Grenzwert -1; denn $\left(\sin^2(k)/(k+1)\right)_k$ ist Nullfolge gemäß dem bekannten Satz, dass ein Produkt einer beschränkten Folge mit einer Nullfolge eine Nullfolge ergibt. Also hat die Folge a die Häufungswerte $-1, 0, 2$ und nur diese. Insbesondere ist -1 der Limes inferior und 2 der Limes superior der Folge a.

2. (a) Setzt man $-x$ in die Reihe ein, so wechseln alle Partialsummen ihr Vorzeichen, also auch der Limes der absolut konvergenten Reihe.

   c. Zunächst einmal hat man das Cauchyprodukt zu bilden:

$$\sin^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{2n+1+2m+1=2k} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)!\,(2n+1)!} \right) x^{2k}.$$

   Nun ist aber jeweils $m+n=k-1$ zu vorgelegtem k der äußeren Summe, wegen $2m+2n+2=2k$. Damit verbleibt, die Summe $c_k = \sum_{2n+1+2m+1=2k} \frac{(2k)!}{(2m+1)!(2n+1)!}$ anzuschauen. Aber eine inhaltliche Interpretation dieser Summe ist uns schon bekannt: Es handelt sich um die Anzahl aller ungeradzahligen Teilmengen einer Menge von $2k$ Elementen. Das ist also nach früherer Übungsaufgabe 2^{2k-1}. Somit ist $c_k = 2^{2k-1}$, und die gewonnene Reihe für $\sin^2$ lautet:

$$\sin^2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$$

3. (a) Interpretation der Reihe unter der gegebenen Konvergenzvoraussetzung: Absoluter Fehler bei Abschätzung des Limes der Reihe durch die Partialsumme $\sum_{k=\ldots}^{n} a_k$. Nach Cauchykriterium hat die Folge r den Grenzwert Null.

   (b) Gemäß a. bedeutet $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = 0$, dass die Reihe $\sum a_n$ schneller konvergiert als $\sum b_n$. Eine optimale Strategiefunktion für die Konvergenz von a fällt entsprechend langsamer als eine solche für die Konvergenz von b.

   (c) Die Konvergenzgeschwindigkeiten liegen in der gleichen Größenordnung, allerdings schließt das die Möglichkeit ein, dass die Fehler sich um einen beliebig großen konstanten Faktor unterscheiden.

4. (a) Zunächst präzisieren wir die Aussage, die lauten muss: Es gibt n_0, so dass $a_n(x) \le a_{n+1}(x)$ für $n \ge n_0$. Dabei ist n_0 gerade so zu wählen, dass $(1 + x/n_0) > 0$. Nunmehr haben wir unabhängig folgende beiden Wege - sehen Sie selbst, wie viel schöner der zweite ist:

      i. Mit Bernoulli-Ungleichung: Sei $n \ge n_0$. Offenbar ist $a_n \le a_{n+1}$, d.h.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1},$$

      gleichwertig zu (man benötigt $1+\frac{x}{n} > 0$, damit die Ungleichung bestehenbleibt!)

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}} \quad\ge\quad \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}, \text{ d.h.}$$

$$\left(\frac{n\,(n+x+1)}{(n+1)\,(n+x)}\right)^{n+1} \quad\ge\quad \frac{n}{n+x}.$$

      Das gilt aber, weil nach Bernoullischer Ungleichung (Schritt '$\ge$'):

$$\left(\frac{n\,(n+x+1)}{(n+1)\,(n+x)}\right)^{n+1} \quad=\quad \left(1-\frac{x}{(n+x)\,(n+1)}\right)^{n+1} \ge 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}.$$

ii. Wieder sei n_0 wie in i. Nun ergibt AGM direkt für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{a_n \cdot 1} &\leq \frac{1}{n+1}\left(n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1\right), \text{ also (beide Seiten hoch } n+1 \text{ (!))} \\
a_n &\leq \left(\frac{n+x+1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

(b) Dass die Folge $(a_n(x))_n$ nach oben beschränkt ist, dazu geht man zweckmäßig so vor: Man hat (falls x eine natürliche Zahl k ist, setze man im Folgenden willkürlich $b_k(x) = 0$.)

$$(*) \text{ Die Folge } b(x) = \left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_n \text{ ist schließlich (ab einem } n_0) \text{ monoton fallend.}$$

Das folgt mit a. sofort daraus, dass

$$\frac{b_n(x)}{b_{n+1}(x)} = \frac{a_{n+1}(-x)}{a_n(-x)}.$$

Ist also $1 - |x|/n_0 > 0$, dann ist $b_n \geq b_{n+1}$ für $n \geq n_0$. Nunmehr stellt man fest, dass $a_n(x) \leq b_n(x)$ für $n \geq n_0$. Denn

$$\frac{b_n(x)}{a_n(x)} = \frac{(1-x/n)^{-n}}{(1+x/n)^n} = \frac{1}{(1-x^2/n^2)^n} \geq 1 \text{ für } n \geq n_0.$$

Damit sind alle Folgenglieder von $a(x)$ ab n_0 beschränkt durch b_{n_0}, und $a\,(x)$ ist überhaupt beschränkt. Daher konvergiert $a(x)$ stets.

5. (a) Erstes Bsp. analog zu Aufg. 1 zu konstruieren, das zweite, mit abzählbar unendlich vielen vorgeschriebenen Häufungspunkten (wir haben es so zu machen, dass nur diese Häufungspunkte sind): Man könnte das bekannte Beispiel $a : n \mapsto$ Anzahl der Primfaktoren von n heranziehen und definieren:

$$b_n = \begin{cases} 0, \text{ wenn } a_n = 1 \\ 1/a_n \text{ sonst} \end{cases}.$$

Offenbar lässt sich auf diese Weise jede beliebige abzählbar unendliche Menge von Häufungspunkten realisieren. Ohne Rückgriff auf das bekannte Beispiel könnte man auch rekursiv ähnlich wie im endlichen Fall konstruieren. Sei h die vorgeschriebene Folge von Häufungspunkten. Dann setze man $A_1 =$ Menge der geraden natürlichen Zahlen und definiere $a_{|A_1}$ mit konstantem Wert h_1. Sei $B_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{A}_1$. Im $n+1$. Schritt setze man $A_{n+1} =$ Menge der Zahlen von geradem Index nach Durchzählen von B_n mittels aller natürlichen Zahlen. Weiter definiert man $a_{|A_{n+1}}$ mit konstantem Wert h_{n+1} und setzt $B_{n+1} = B_n \setminus A_{n+1}$.

(b) Das ist nun sehr einfach: Für $n \equiv 0(3)$ setzt man $a_n = A$, für $n \equiv 1(3)$ sei $a_n = 2A$, für $n \equiv 2(3)$ sei $a_n = 3A$. Man kann die Folge natürlich auch etwas interessanter gestalten, so dass man nichtkonstante Teilfolgen gegen diese Grenzwerte konvergieren lässt, aber begrifflich ist das nicht notwendig.

6. Das sollte man auch erwarten, dass die Mittelwertfolge einer konvergenten Folge denselben Grenzwert hat. Sei $|a_n - A| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_0$. Sei weiter $p \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\frac{\sum_{k<n_0} |a_k - A|}{n_0 + p} < \varepsilon/2.$$

Dann hat man für $n \geq n_0 + p$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - A)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k<n_0} |a_k - A| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n} |a_k - A| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-n_0+1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$