Lösungen zum 5. Übungsblatt

1. Es ist von vornherein klar, dass $D_0^n = 0$ und $D_n^n = 1$.

$$\begin{aligned} [x]_{n+1} &= [x]_n (x-n) = \sum_{k=1}^{n} D_k^n x^{k+1} - n \sum_{k=1}^{n} D_k^n x^k, \text{ also} \\ D_k^{n+1} &= D_{k-1}^n - n D_k^n \text{ für } 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Das ergibt die Tabelle

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
1	0	1				
2	0	-1	1			
3	0	2	-3	1		
4	0	-6	11	-6	1	
5	0	24	-50	35	-10	1

2. Man hat stets $\sigma(n,n) = n!$ und $\sigma(n,1) = 1$. Für $1 \leq k < n$ hat man die Rekursionsformel

$$\sigma(n+1, k+1) = (k+1)\sigma(n, k+1) + (k+1)\sigma(n,k).$$

Das erklärt sich so: Entweder ist die Restriktion auf die ersten n Elemente der Urbildmenge bereits eine Surjektion auf die Zielmenge mit $k+1$ Elementen, dann hat man noch $k+1$Möglichkeiten, das verbleibende Element abzubilden (erster Summand). Oder aber die Restriktion bildet eine Surjektion auf nur k Elemente der Zielmenge. Dann hat man $k+1$ Möglichkeiten dafür, welches Element der Zielmenge ausgelassen wird. Das verbleibende Element des Definitionsbereichs muss auf dies abgebildet werden. So erklärt sich der zweite Summand. Das ergibt folgende Tabelle:

$n \setminus k$	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	2			
3	1	6	6		
4	1	14	36	24	
5	1	30	150	240	120

3.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+1} \right) + \left(-\frac{1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dabei nutzt man für die entscheidenden Umformungen, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{k(k+1)}$ sowie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/2}{(k+1)(k+2)}$ absolut konvergent sind, wofür man sich auf das Resultat von Aufgabe 6 berufen kann.

4. AGM-Abschätzung für $n!$ ergibt $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$, also $n! \leq 2^{-n}(n+1)^n$, zweites Beispiel: $|[\alpha]_n| \leq \left(\frac{n-1}{2} + |\alpha|\right)^n$. Man beachte dazu: $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha - k| \leq n \left(|\alpha| + \frac{(n-1)n}{2} \right)$. Das ging zum Teil fürchterlich schief, weil man nicht mit Beträgen arbeitete und zum Teil immer noch glaubt, dass $|\alpha - n| < |\alpha|$, ohne Rücksicht auf den Wert von α.

5. $q = 0.8$: Für absoluten Fehler unter 0.001 wird $N = 38$ benötigt, für relativen Fehler unter 0.001 hat man $N = 30$. $q = 0.9$: Resultate jeweils 87 und 65.

6. Wenn man das Bildchen malt, sieht man mit Untersumme und Obersumme zum Integral bei Streifen der Breite 1 im Bereich $[N, N+K]$, dass

$$\sum_{k=1}^{K} f(N+k) \leq \int_{N}^{N+K} dx f(x) \leq \sum_{k=0}^{K-1} f(N+k).$$

Das liefert für $N = 1$ und $\alpha > 1$:

$$\sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{1+K} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{1+K} = \frac{1}{1-\alpha}(1+K)^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Bildet man den Limes der rechten Seite für $K \to \infty$, so erhält man $\frac{1}{\alpha-1}$. Also ist die vorn stehende Reihe konvergent. (Warum?) Natürlich ist dann auch die Reihe beginnend mit $k = 1$ konvergent. Ebenso hat man für $N = 1$ und $\alpha = 1$, $K > 1$:

$$\int_1^{1+K} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k}.$$

Nun hat die linke Seite aber den Wert $\ln(K+1)$, und das geht nach Unendlich für $K \to \infty$. Also divergiert die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nach Unendlich. Damit ist der Fall auch für $\alpha < 1$ klar, da die zugehörigen Reihen von der harmonischen majorisiert werden.

   (a) Zu den beiden weiteren Anwendungen hat man nur zu betrachten, was die zugehörigen Integrale machen:

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x)} &= \infty, \text{ da} \\ \int_2^K \frac{dx}{x\ln(x)} &= \ln(\ln(K)) - \ln(\ln(2)), \text{ was nach } \infty \text{ geht.} \end{aligned}$$

   Dagegen

$$\int_2^K \frac{dx}{x\ln^2(x)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(K)} \underset{K\to\infty}{\to} \frac{1}{\ln(2)},$$

   daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}.$$

7. $e^x \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \frac{163}{60}x^5 + ...$