Ausgewählte Lösungen zum 4. Übungsblatt

■ 2H) Betrachten Sie die folgenden 4 Folgen: $a_n = 10^{-n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ für n>0 $c_n = \frac{1}{\log(n)}$ für n>1 und $d_n = \frac{1}{\log(\log(n))}$ für n>10. Dabei bezeichnet log den Logarithmus zur Basis 10. Zeigen Sie, dass alle diese Folgen den Grenzwert 0 haben durch Bestimmung einer zugehörigen Strategiefunktion. Wie groß ist jeweils n zu wählen, damit die Folgenglieder kleiner als 10^{-3} werden? Das sollte ein Gefühl dafür geben, wie unterschiedlich schnellNullfolgen gegen Null konvergieren können!

2. Das Wesentliche wurde zumeist eingesehen, aber man scheiterte in aller Regel daran, wie verlangt **Strategiefunktionen** anzugeben. Der Reihe nach könnten diese so aussehen (Erinnerung: log hier zur Basis 10.) Man beachte, dass eine Strategiefunktion nur auf einem beliebig kleinen Intervall $]0,\delta[$ mit $\delta > 0$ definiert werden muss, insbesondere genügt $]0,1[$.

   (a) Zu $(a_n)_n : N = (]0,1[, \varepsilon \mapsto -\log(\varepsilon)], \mathbb{R})$; Außerdem wurde die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null genommen. Mit dieser Definition von N gilt offenbar für alle $\varepsilon \in]0,1[$, dass $|a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

   (b) Zu $(b_n)_n : N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \frac{1}{\varepsilon}, \mathbb{R}\right)$,

   (c) Zu $(c_n)_n : N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto 10^{1/\varepsilon}, \mathbb{R}\right)$,

   (d) Zu $(d_n)_n : N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto 10^{10^{1/\varepsilon}}, \mathbb{R}\right)$.

■ 3H) Welche der folgenden Folgen ist konvergent? Raten oder bestimmen Sie zunächst den eventuellen Grenzwert. Sofern kein Grenzwert existiert, begründen Sie dies. Achten Sie auf eventuelle Monotonie. Liegt die Restriktion einer diskutierbaren Funktion vor? Die ersten Folgenglieder aufschreiben.

Bestimmen Sie dann für die konvergenten Folgen eine **Strategiefunktion,** was in der Regel nach dem Schema geschieht:

$$\boxed{|a_n - A| \overset{\text{Vorsichtig vergrößern}}{\leq} \bar{A}_n \overset{\text{Für } n>N}{\leq} \bar{A}_N \overset{?!}{\leq} \varepsilon \qquad N_0(\varepsilon) \text{ löst } \bar{A}_N \overset{?!}{\leq} \varepsilon}$$

a) n$\mapsto \frac{2}{n^3+4}$	b) n$\mapsto \frac{2n^3-1}{3n^3+n^2+5}$	c)n$\mapsto \frac{2n^3-1}{n^2+5}$
d) n$\mapsto \sin(\frac{2}{n^2+3})$	(beachte: $\lvert\sin(x)\rvert \leq \lvert x\rvert$)	
e) n$\mapsto \frac{1}{\sqrt{n}-\sin(n)}$	f) n$\mapsto \frac{n+(-1)^n 2}{n+3}$	g) n$\mapsto \frac{n^2}{2^n}$

3. (a) Grenzwert ist Null, eine Strategiefunktion ist $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/3}, \mathbb{R}\right)$,

   (b) Grenzwert ist 2/3, man hat

   $$\left|\frac{2n^3-1}{3n^3+n^2+5} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}\frac{13+2n^2}{3n^3+n^2+5} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{13}{3n^3} + \frac{2}{n}\right),$$

   und es genügt $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \max(2, \frac{4}{3\varepsilon}), \mathbb{R}\right)$; (setze nur $\frac{2}{3n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ und beobachte, dass $\frac{13}{3n^3} < \frac{2}{n}$ für $n \geq 2$.

   (c) Folge divergiert nach ∞.

   (d) Grenzwert offenbar Null, und $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \mathbb{R}\right)$ ist eine passende Strategiefunktion.

   (e) Grenzwert Null, Strategiefunktion $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)^2, \mathbb{R}\right)$.

   (f) Grenzwert ist 1, Strategiefunktion $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \frac{5}{\varepsilon}, \mathbb{R}\right)$; denn $\frac{n-2}{n+3} = 1 - \frac{5}{n+3}$, $\frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}$, also muss nur dafür gesorgt werden, $\left|\frac{5}{n+3}\right|$ klein zu machen.

(g) Eine Teilnehmerin hat geschickt so argumentiert: Für $n \geq 10$ ist $2^n > n^3$ und somit $\frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n}$, also genügt $N = \left(]0,1[, \varepsilon \mapsto \frac{1}{\varepsilon}, \mathbb{R}\right)$. Natürlich wäre es in diesem Stadium angemessen, die verwandte Ungleichung $2^n > n^3$ für $n \geq 10$ induktiv zu beweisen - das ist leicht, statt sich auf bekannte Dominanzargumente aus der Analysis zu stützen.

■ 4H) Beweisen Sie: Es sei x:$\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine konvergente Folge. Beweisen Sie: $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}}$. Was ist damit genauer gemeint? Welche Verallgemeinerung sollte man betrachten und sich merken?

4. Es hätte genügt, den Satz zu verwenden, dass bei einer konvergenten Folge jede Teilfolge gegen denselben Grenzwert konvergiert. Die naheliegende Verallgemeinerung: Mit einer konvergenten Folge $(x_n)_n$ konvergiert auch $(x_{n+p})_n$ gegen denselben Grenzwert, mit beliebigem festem $p \in \mathbb{N}$.

■ 5H) Beweisen Sie, dass $\underline{n \mapsto \frac{a^n}{n!}}$ für jedes $a \in \mathbb{C}$ Nullfolge ist!

5. Zunächst für reelle Zahlen: Man kann einmal abstrakt so argumentieren, dass sogar mit Quotientenkriterium die Reihe absolut konvergiert und dann benutzen, dass aus Reihenkonvergenz insbesondere folgt, dass die einzelnen Summanden eine Nullfolge ergeben müssen. Man kann aber auch etwa folgendes konkretere Argument angeben:

   Sei $c_n = \frac{|a|^n}{n!}$. Sicher gibt es eine natürliche Zahl n_0, so dass $\frac{|a|}{n_0+1} < \frac{1}{2}$. (Warum?) Nun hat man allgemein $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|a|}{n+1}$, also $c_{n_0+p} < c_{n_0} \cdot \frac{1}{2^p}$, $p \in \mathbb{N}$. Daher bildet $(c_{n_0+p})_p$ eine Nullfolge, und es folgt, dass $(c_n)_n$ eine Nullfolge bildet, da es für die Konvergenz nur darauf ankommt, was eine Folge *schließlich* macht. Für komplexe Zahlen a kann man die Aussage dann ableiten, indem man z.B. $a = |a| e^{i\alpha}$ schreibt und feststellt: $a^n/n! = e^{ina}|a|^n/n!$, also $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!}$, Nullfolge nach dem Obenstehenden. Wenn aber für eine Folge $(c_n)_n$ komplexer Zahlen gilt, dass die Folge ihrer Beträge nach Null geht, so gehen auch Real- und Imaginärteil beide nach Null wegen der Abschätzungen $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

■ 6) Bestimmen Sie die eventuellen **Häufungspunkte** (in der Regel durch Inspektion).

a) a_n = Zahl der verschiedenen Primfaktoren von n
b) $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2+1}$
c) $c_n = \left[\frac{n}{3}\right]$ wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ ist.
d) $d_n = (-1)^n n$

6. (a) Da es beliebig große Primzahlen gibt, gibt es auch beliebig große natürliche Zahlen mit jeweils einer festgelegten Anzahl k von Primfaktoren, $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Das heißt: Es gibt für jede natürliche Zahl k eine konstante Teilfolge von $(a_n)_n$ mit dem Wert k. Daher ist *jede natürliche Zahl* ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_n$.

   (b) Der zweite Summand geht nach Null, also sind die Häufungswerte -1 und 1. Ausführliche Begründung: Die Teilfolgen $(b_{2k})_k$ und $(b_{2k+1})_k$ konvergieren gegen 1 bzw. -1. Also sind das Häufungswerte. Andererseits gilt stets für $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ $|b_n - 1| < \varepsilon$ oder $|b_n + 1| < \varepsilon$, also kann es keine weiteren Häufungswerte geben. Mit $a \notin \{1, -1\}$ hätte man $\delta = \min(|a-1|, |a+1|) > 0$, und für $n \geq N(\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon < \delta$ wäre kein Folgenglied b_n mehr in der $\delta-$Umgebung von a.

   (c) Die Folge divergiert 'bestimmt' nach ∞, also gibt es keinen endlichen Häufungswert, und mit der Ergänzung der Zahlengeraden um den Punkt ∞ hat man diesen als Grenzwert und daher einzigen Häufungswert.

   (d) Analog zu c. und mit Argumentation analog zu b. hat man die Häufungswerte $-\infty, \infty$, keine endlichen.

■ *7H) In der Vorlesung wurde mit Hilfe der AGM-Ungleichung gezeigt, dass $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ gilt. D.h. n$\mapsto$ $\sqrt[n]{n} - 1$ ist Nullfolge. Die Idee war, $\sqrt[n]{n^r} = \sqrt[n]{(\sqrt{n})^{2r}\, 1^{n-2r}}$ zu schreiben und darauf die AGM-Ungleichung anzuwenden. Aber wie verhält sich $\sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1)$? Das läßt sich über eine leichte Änderung der ersten Idee beantworten

7. Diese Aufgabe ist von einer Teilnehmerin schön gelöst worden. Idee muss es sein, die Abschätzung für $\sqrt[n]{n}$ gegenüber der schon bekannten wesentlich zu verbessern. Denn die Ungleichung $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ würde bei unmittelbarer Anwendung auf $\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n} - 1)$ nur liefern: $\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n} - 1) \leq 2$, nicht aber, dass die vorliegende Folge nach Null geht. Eine passende Änderung der Idee lautet (die folgende Ungleichung gilt laut AGM):

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= \sqrt[n]{\sqrt[4]{n}^4 \cdot 1^{n-4}} \leq \frac{1}{n}\left(4\sqrt[4]{n} + n - 4\right) = 4n^{-3/4} - \frac{4}{n} + 1, \text{ also} \\ \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) &\leq \sqrt{n} \cdot 4n^{-3/4} = 4n^{-1/4}, \text{ und das geht gegen Null, daher} \\ \text{wegen } 0 &\leq \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \text{ mit 'Sandwich' die Aussage.} \end{aligned}$$