Übungen Höhere Mathematik für Physiker
Nr.2 23. Oktober 2002

Hausaufgaben:

■ 1) Beweisen Sie (mit vollst. Induktion): Für x>-1 und n$\in \mathbb{N}$, n$\geq$ 1 gilt (1+x)^n $\geq (1+nx)$. Ist x$\neq$ 0, gilt sogar >. Kann man das Resultat auch über Kurvendiskussion verstehen?

■ 2) Was ergibt der Binomialsatz für $\boxed{\text{a=b=1}}$ und für $\boxed{\text{a=-b=1}}$? Nutzen Sie das Ergebnis aus, um $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k}$ und $\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1}$ zu vereinfachen. Hierbei ist $(\mathbb{R}, x \mapsto [x], \mathbb{Z})$ die Abbildung, die jedem x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner als x ist.

■ 3) Führen Sie in der Diskussion des Multinomialsatzes eine weitere Menge ein, mit deren Hilfe man auch den letzten Schritt aus den Beispielen aus Kap.1 (1.6.3) formalisieren kann!

■ 4) Vollständige Induktion: **Ein geometrisches Problem.** In wieviel Teile läßt sich die Ebene durch n Geraden höchstens unterteilen? Die Geraden selbst werden nicht mitgezählt. Erläutern Sie zunächst am Beispiel n=3 die Notwendigkeit der Forderung "höchstens". Das gehört zum "Verstehen der Aufgabe"!

■ 5) Sei g=($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,(r,s)$\mapsto 2^r 3^s, \mathbb{N}$).
a) Veranschaulichen Sie g vom Feldstandpunkt aus (in der Nähe des Ursprungs)
b) Was ist Bildg? (Also: Welche Elemente=Zahlen enthält diese Menge?)

■ 6) Es sei $\mathbb{L} = \{(x,y)|$ x,y$\in \mathbb{R}$ und $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$. D.h. $\mathbb{L}$ ist Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ und repräsentiert im $\mathbb{R}^2_K$ eine bestimmte Figur.

- – Um welche Figur handelt es sich (Skizze!). Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}$ dieser Figur, so dass Bild$\vec{r} = \mathbb{L}$ wird.
  – Finden Sie eine geeignete Abbildung s vom Skalarfeldtyp, derart, dass $\mathbb{L} = \overset{-1}{\underline{s}}(\{1\})$ wird. Geben Sie eine kurze Diskussion des Verhaltens dieser Abbildung. Für den Rest der Aufgabe sei s dieses Skalarfeld.
  – Bestimmen Sie $\overset{-1}{\underline{s}}(\{1,2\})$ und $\overset{-1}{\underline{s}}([1,2])$. Skizze genügt.
  – Beschreiben Sie die geometrische Form von Graph(s). Geben Sie für diese Menge eine injektive Paramerisierung an.
  – Lösen Sie die eingangs gegebene Gleichung nach y auf und beschreiben Sie das Resultat mit Hilfe von 2 reellen Funktionen. Wie hängen $\mathbb{L}$ und der Graph dieser Funktionen zusammen?

■ 7) (Verständnis: Parametrisierung, elementare Vektorrechnung): In der Ebene $\mathbb{R}^2_K$ sei der Einheiskreis gegeben. P sei ein Punkt darauf. Weiter sei $\alpha = \alpha(P)$ der übliche Polarwinkel des Punktes. Q sei der Punkt des Einheitskreises mit $\frac{\alpha(P)}{2}$ als Polarwinkel. Dann sei g die Verbindungsgerade von P mit dem Punkt (1,0) und q die Lotgerade von Q auf die 1-Achse - sofern das Lot existiert. (Gerade, nicht Strecke!) Schließlich sei S der Schnittpunkt von g mit q. **Bestimme den geometrischen Ort, also die Menge aller Schnittpunkte.** (Hinweis: Was ist als erstes zu tun? Vektoriell rechnen).

Lösungen und Kommentare zu den Hausübungen Nr.2

1. Die vollständige korrekte Aussage, die zu beweisen ist, lautet:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & (1+x)^n & \geq & 1+nx \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } x > -1 \\ 2. & (1+x)^n & > & 1+nx \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \text{ und } x > -1, x \neq 0. \end{array}$$

Aussage 1 ist klar für $n = 1$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben. Sei weiter $x > -1$. Es gelte $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Wie zeigen nun, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ und zusätzlich für den Fall $x \neq 0$ sogar $(1+x)^{n+1} >$

$1+(n+1)x$. Aus $x>-1$ und $(1+x)^n \geq 1+nx$ folgt $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ (gemäß Axiom zu den Ungleichungen!). Also

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Damit gilt also Aussage 1 auch für $n+1$ und damit für alle $n \in \mathbb{N}$, und zusätzlich gilt Aussage 2 für $n+1$, da $nx^2 > 0$ für $x \neq 0$. Somit gilt auch Aussage 2 für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Man beachte, dass ein Induktionsanfang für Aussage 2 überflüssig ist, da Aussage 1 für den Vorgänger schon genügte und für Aussage 1 eine Induktionsverankerung vorlag.

2. Die angeregten Einsetungen ergeben sofort

$$\begin{aligned} 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ und (setze } a=-1, b=1\text{):} \\ 0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1}, \end{aligned}$$

also sind letztere beiden Summen gleich, und ihre Summe hat den Wert 2^n, so dass

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

3. Es handelt sich insgesamt um folgende Mengenbildungen, die auch bei vorhandenen Ansätzen kaum korrekt aufgeschrieben werden konnten:

$$\begin{aligned} M' &= \text{Menge aller Wörter der Länge 3 aus den Buchstaben } a,b,c \\ &= \{xyz | x,y,z \in \{a,b,c\}\}. \end{aligned}$$

Zweckmäßig arbeitet man nicht mit M', sondern mit der Menge M aller **lexikographisch geordneten** Wörter aus M'. Nun wird M im letzten Schritt in folgende drei Klassen unterteilt:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{xxx | x \in \{a,b,c\}\} \\ M_2 &= \{xyz \in M | \{x,y,z\} \text{ hat Anzahl } 2\} \\ M_3 &= \{xyz \in M | \{x,y,z\} \text{ hat Anzahl } 3\}. \end{aligned}$$

Es wird also klassifiziert nach der Anzahl der Buchstaben im Wort. Die Partition ist $\{M_1, M_2, M_3\}$ Zu jeder Klasse gehört genau ein Multinomialfaktor. Allgemein für n Buchstaben hätte man für den Exponenten m eine beliebige Summenaufspaltung $m = \sum_{r=1}^{n} k_r$ mit $k_r \geq k_{r+1}$ für $r < n$ zu bilden, und die Klasse der lexikographisch geprdneten Wörter zum Multinomialkoeffizienten

$$\frac{m!}{k_1! \cdot ... k_n!}$$

bestünde aus den Wörtern, die k_1 mal den ersten Buchstaben und... k_n mal den $n-$ten Buchstaben enthalten.

4. Die Konkretisierung klappte ganz gut. Aber zum Induktionsbeweis: Die zu beweisende Aussage lautet mit der Definition (ohne diese kombinatorische Bedeutungsfestlegung kommt man nicht aus!):

> T_n sei die maximale Anzahl der Gebiete, in welche die Ebene durch n Geraden eingeteilt werden kann.

folgendermaßen:

$$T_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Für $n = 0$ gilt sie offenbar. (Man kann auch erst bei 1 anfangen, und dann ist das ebenfalls klar.) Sie gelte für n. Der wesentliche Schritt, daraus die Aussage für $n+1$ zu folgern, besteht im *kombinatorischen Sachverhalt* $T_{n+1} = T_n + n + 1$. Der begründet sich dadurch, dass eine maximale Zerteilung mittels einer $n+1$. Geraden bei schon vorliegender Einteilung durch n Geraden so zustandekommt, dass die $n+1$. Gerade alle übrigen schneidet und somit $n+1$neue Gebiete hinzufügt. (Ohne Benutzung dieses Sachverhalts sind alle Ihre 'Beweise' Makulatur!) Nun geht der Rest mit Induktionsvoraussetzung ganz routinemäßig: $T_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

5. a klappte recht gut. Aber so etwas wie eine simple Beschreibung von Bild(g) macht immer noch große Schwierigkeiten, und es wurden vielfach völlig unsinnige Mengenbeschreibungen angebracht oder völlig falsche Mengen hingeschrieben: Wir präzisieren hier einmal $\mathbb{N}$ als Menge der natürlichen Zahlen ab 1, also ohne Null. Dann besteht Bild(g) besteht einfach aus allen natürlichen Zahlen, deren Primfaktorzerlegungen nur die Primzahlen 2 und 3 enthalten, beide mindestens einmal. Oder auch:

$$\text{Bild(g)} = \{n \in \mathbb{N} | \text{ für alle } p \in P \setminus \{2, 3\} : p \nmid n \text{ und } 6|n\}.$$

6. (a) $\vec{r} = \left([0, 2\pi[, \alpha \mapsto (2\cos(\alpha), \sin(\alpha)), \mathbb{R}^2\right)$ und Figur (Ellipse mit Halbachsen $2, 3$ parallel zu Koordinatenachsen mit Mittelpunkt im Ursprung) - das ging recht ordentlich.

   (b) Das Wesentliche wurde verstanden, grauenhaft nur meist, wie s aufgeschrieben wurde, korrekt so:

   $$s = (\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}, \mathbb{R}).$$

   Nicht etwa gehört eine Gleichung hinter den Zuordnungspfeil! Vielmehr ergibt sich gerade $\underline{s}^{-1}(\{1\}) = \mathbb{L}$. Zum Verhalten von s sollte man bemerken, dass alle Werte positiv sind und die Urbilder von Einermengen, also die Niveaukurven, stets Ellipsen sind, die sich alle durch Aufblasen bzw. Schrumpfen derjenigen zum Feldwert 1 ergeben. (Vgl. noch zu Teil d.)

   (c) Diese Urbilder konnten problemlos bestimmt werden.

   (d) Es wurde gut eingesehen, wie der Graph von s geometrisch aussieht: Ähnlich wie ein Paraboloid, nur sind hier die Querschnitte Ellipsen. Grauenhaft wieder die geforderte injektive Parametrisierung, hier ist sie:

   $$\vec{x} = (\mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left(x, y, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right), \mathbb{R}^3).$$

   Injektivität ergibt sich sofort aus den wörtlichen Wiederholungen der Urbildkomponenten in den ersten zwei Bildkomponenten.

   (e) Dies klappte einigermaßen, nur gab es zum Teil Schwierigkeiten, einfach so etwas wie $f(x) = 3\sqrt{1 - x^2/4}$ und $g(x) = -3\sqrt{1 - x^2/4}$ hinzuschreiben - man kann eben nicht *eine* Funktion mit '$\pm$' definieren. Volle Abbildungstripel wären auch schön gewesen, also insbesondere Definitionsbereich zu f, g, das ist $[-2, 2]$. Und nun sollte man die gestellte Frage knapp beantworten mit Graph$(f) \cup$ Graph$(g) = \mathbb{L}$. (Statt ausweichend von 'irgendwie zusammengesetzt', 'ergibt zusammen' zu sprechen. Wozu haben wir denn die Mengen?

7. Das war ganz in Ordnung, es kam heraus

   $$\vec{x}_S(\alpha) = \left(\cos\alpha/2, \frac{\cos\alpha/2 - 1}{\cos\alpha - 1}\sin\alpha\right) = \left(\cos\alpha/2, \frac{1 - \cos\alpha/2}{\tan\alpha/2}\right), \ 0 \le \alpha < 2\pi,$$

   als Parametrisierung der gefragten Menge. Allerdings hätte man sich noch ein wenig Gedanken über deren ganze Gestalt machen dürfen: Vom Punkt $(0, 0)$ aus, der nicht mehr dazu gehört, wandert man mit wachsendem α nach links, mit kleinen positiven $y-$ Werten und kippt dann steil ab mit $y-$ Werten gegen $-\infty$. Hier ist die Kurve:

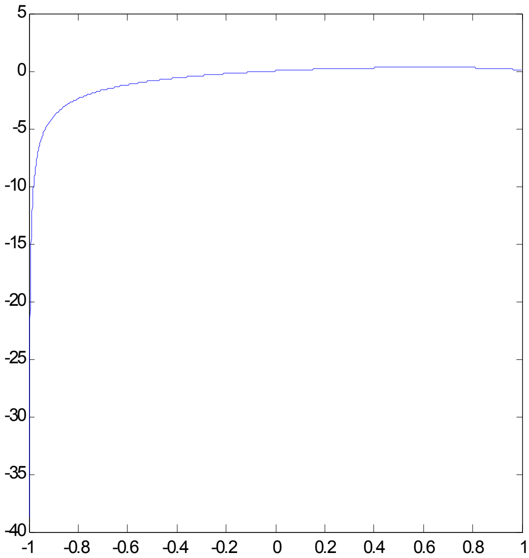

Abbildung 1: