Einige **Lösungen zu Übung Nr.14**

■ 1H) Es sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Auf V seien zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ gegeben. Die beiden Normen heißen "äquivalent", wenn folgendes gilt:

Es gibt Zahlen c,C>0, derart, dass $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$ für alle $x \in V$.

a) Zeigen Sie, dass das eine Äquivalenzrelation in der Menge der Normen für V liefert.
b) Zeigen Sie, dass für den $\mathbb{R}^n$ euklidische Norm und L^1-Norm äquivalent sind.

▼ a) **Symmetrie**: Ist erfüllt, da stets $1\|x\|_1 \leq \|x\|_1 \leq 1\,\|x\|_1$ gilt.

Reflexivität: Es sei $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$ für alle $x \in V$ gültig mit c,C>0. Damit folgt $\frac{1}{C}\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{c}\,\|x\|_2$ für alle x wie gewünscht.

Transitivität: Angenommen $c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$ und $d\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq C\,\|x\|_2$ für ale x$\in V$. Dann folgt, da alle Multiplikatoren positiv sind $cd\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq CD\,\|x\|_1$ wie gewünscht.

Meist zu lang geraten.

b) Wir zeigen $\boxed{c\|x\|_1 \leq \|\vec{x}\|_E \leq C\,\|\vec{x}\|_1\,.}$ (Hier war gemeint, dass Sie diesen Fall **nachweisen**.) Wir geben zwei Lösungswege

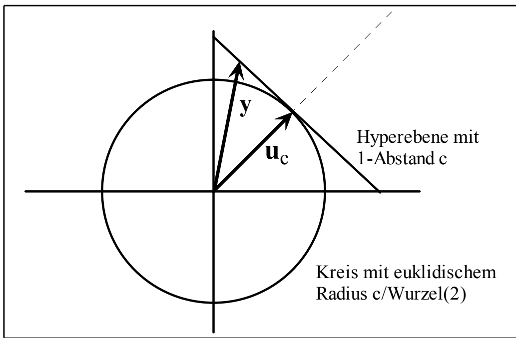
1. Weg: Zunächst ist nach dem Multinomialsatz $\|\vec{x}\|_E^2 = \Sigma x_i^2 = \Sigma|x_i|^2 \leq (\Sigma|x_i|)^2$. Also kann C=1 gewählt werden.

Die Gleichung ist für jede Wahl von c und C richtig für $\vec{x} = 0$. Sei also $\vec{x} \neq \vec{0}$ und j derart, dass $|x_j| = \max_i |x_i| > 0$. Dann folgt für c>0:

$$c^2\,\|\vec{x}\|_1^2 = c^2\,(\Sigma|x_i|)^2 \leq c^2\,(n|x_j|)^2 = c^2n^2|x_j|^2 \leq c^2n^2\Sigma_i|x_i|^2 = c^2n^2\Sigma_i x_i^2 = c^2n^2\,\|\vec{x}\|_E^2$$

Das zeigt: $\boxed{c=\frac{1}{n}}$ liefert das Gewünschte.

2. Weg: Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Bereich $x_i \geq 0$ beschränken. Hier wird der Rand der L^1-Kugeln durch die Hyperflächen $(u_1,..,u_n) \mapsto \Sigma\vec{e}_i u_i$ mit $\Sigma u_i = c$ gegeben. Diese Hyperebenen sind tangential zu den euklidischen Kugeln im Diagonalpunkt $u_i = \frac{c}{n}$.



Beachten Sie, dass $||\vec{u}_c|| \neq ||\vec{u}_c||_E$ gilt. Aber beide Werte lassen sich über die Komponentenformeln ausrechnen. Und es ist bekannt, dass $||\vec{u}_c||_E \leq ||\vec{y}||_E$ ist, weil $\vec{u}_c$ der Vektor des kürzesten Abstandes ist.

Sei jetzt $\vec{y}_c$ irgendein Punkt der Hyperebene, $\vec{u}_c$ der Berührungspunkt mit der Kugel, der zugleich der Punkt kürzesten euklidischen Abstands zum Ursprung ist, dann gilt

$$||\vec{y}||_1 = ||\vec{u}_c||_1 = c = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n\cdot\frac{c^2}{n^2}} = \sqrt{n}||\vec{u}_c||_E \leq \sqrt{n}||\vec{y}||_E.$$

Denn natürlich haben die übrigen Punkte der Hyperebene eine größere euklidischen Länge als der Berührungspunkt. Es folgt $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}||\vec{y}||_1 \leq ||\vec{y}||_E}$ und das ist die größtzulässige Konstante.

■ 2H) Seien jetzt V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Für jeden dieser beiden Räume habe man **zwei** äquivalente Normen. Weiter sei die Abbildung f:V$\rightarrow W$ in x_0 bezüglich der jeweils ersten Norm stetig. Zeigen Sie, dass f dann in x_0 auch bezüglich der beiden anderen Normen stetig ist.

▼ Es sei f=(V,$x \mapsto f(x), W)$ bezüglich $\|.\|_{V1}$ und $\|.\|_{W1}$ stetig. D.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ findet sich ein $\delta_1(\varepsilon)$, so dass $\|f(x+\Delta x) - f(x)\|_{W1} < \varepsilon$, sofern nur $\|\Delta x\|_{V1} < \delta_1(\varepsilon)$. Die äquivalenten Normen seien $\|.\|_{V2}$ und $\|.\|_{W2}$. Aus der Äquivalenz folgt die Existenz einer Konstanten C mit $\|y\|_{W2} \leq C\,\|y\|_{W1}$ für alle y$\in W$ und daher:

$$\|f(x+\Delta x) - f(x)\|_{W2} \leq C\,\|f(x+\Delta x) - f(x)\|_{W1} \leq C\varepsilon \qquad \text{für } \|\Delta x\|_{V1} < \delta_1(\varepsilon).$$

Aus der Äquivalenz der beiden V-Normen folgt weiter die Existenz einer Konstanten D mit $||x||_{V2} \leq D||x||_{V1}$. Dann folgt aus $\|\Delta x\|_{V1} < \delta_1(\varepsilon)$ aber $\|\Delta x\|_{V2} \leq D\,\|\Delta x\|_{V1} < D\delta_1(\varepsilon)$. Und das heißt, dass $\boxed{\delta_2(\varepsilon) = D\delta_1(\frac{\varepsilon}{C})}$ das Gewünschte leistet. Nämlich: Für $\|\Delta x\|_{V2} < \delta_2(\varepsilon)$ gilt

$$\|f(x+\Delta x) - f(x)\|_{W2} < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Anmerkung. Zu zeigen ist doch: Gebe ε>0 beliebig vor. Konstruiere dazu $\delta_2(\varepsilon) > 0$, derart, dass für alle Δx mit $||\Delta x||_{V2} < \delta_2(\varepsilon)$ die angestrebte Ungleichung erfüllt ist! Dieser sprachlich dargestellte Rahmen ist auszufüllen!

■ 4H) Beweisen Sie, dass für die Operatornorm im endlichdimensionalen Fall gilt:

a) $\|A\vec{x}\|_W \leq \|A\|_{Op}\,\|\vec{x}\|_V$.

b) $\|A \circ B\|_{Op} \leq \|A\|_{Op}\,\|B\|_{Op}$

Dazu die folgenden Gleichungen sorgfältig mit Begründungen und Erläuterungen versehen:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|_W &= \|\vec{x}\|_V \left\| A\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V}\right)\right\|_W \leq \|\vec{x}\|_V\,\|A\|_{Op} \\
\|A \circ B\|_{Op} &= \|A \circ B(\vec{x}_0)\|_W = \|A(B(\vec{x}_0))\|_W \leq \|A\|_{Op}\,\|B(\vec{x}_0)\|_V \\
&\leq \|A\|_{Op}\,\|B\|_{Op}\,\|\vec{x}_0\|_U \leq \|A\|_{Op}\,\|B\|_{Op}\,.
\end{aligned}$$

▼ Zu a):

$$\|A\vec{x}\|_W \overset{(1)}{=} \|\vec{x}\|_V \left\| A\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V}\right)\right\|_W \overset{(2)}{\leq} \|\vec{x}\|_V\,\|A\|_{Op}$$

(1) Besagt. Es ist $\vec{x} \neq \vec{0}$. Also $\|\vec{x}\|_V > 0$. Dann folgt die Gleichheit über die Linearität von L und die Homogenität der Norm.

(2) Folgt aus der Supremumsdefinition der Operatornorm. Denn $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_V}$ ist **Einheitsvektor**. Und stets gilt $x_i \leq \sup_k(x_k)$.

▼ Zu b) $\vec{x}_0$ ist offensichtlich der Punkt, in dem A$\circ B$ das Maximum annimmt (Die Einheitskugel ist kompakt! $||\vec{x}_0||_U = 1$). Das klärt (1). Dann folgt (2) über die Definition der Zusammensetzung.

$$\begin{aligned}
&\|A \circ B\|_{Op} \overset{(1)}{=} ||A \circ B(\vec{x}_0)||_W \overset{(2)}{=} \|A(B(\vec{x}_0))\|_W \overset{(3)}{\leq} \|A\|_{Op}\,\|B(\vec{x}_0)\|_V \\
&\overset{(4)}{\leq} \|A\|_{Op}\,\|B\|_{Op}\,\|\vec{x}_0\|_U \overset{(5)}{\leq} \|A\|_{Op}\,\|B\|_{Op}\,.
\end{aligned}$$

Und (3) nutzt die stets gültige Ungleichung $||A(\vec{y})||_W \leq ||A||_{Op}||\vec{y}||_V$ aus, die in a) bewiesen wurde. Diese wird in(4) entsprechend für B benutzt. Und (5) schließlich verwendet $||x_0|| = 1$, d.h. das $\leq$ könnte auch durch ein $=$ ersetzt werden.

■ 5H) Beweisen Sie Ungleichung b) aus 4) auch für die $L^1 - Norm$ für Matrizen!

$$||AB||_1 = \sum_{ik} |(AB)_{ik}| = \sum_{ik} |\Sigma_r A_{ir} B_{rk}| \leq \sum_{ikr} |A_{ir} B_{rk}|$$

Das folgt aus den Definitionen der L^1-Norm und der Matrixmultiplikation. Der letzte Schritt ergibt sich mit der Dreiecksungleichung. Zum letzten Term werden jetzt nicht negative Beiträge hinzuaddiert (nämlich die mit r$\neq s$). Das gibt

$$\sum_{ikr} |A_{ir} B_{rk}| \leq \sum_{ikrs} |A_{ir} B_{sk}| = \sum_{ikrs} |A_{ir}||B_{sk}| = (\Sigma_{ir}|A_{ir}|)\,(\Sigma_{sk}|B_{sk}|) = \|A\|_1\,\|B\|_1 \,.$$

Zusammen ist das die gewünschte Ungleichung.

Wie steht es mit der Supremumsnorm? Hier gilt die entsprechende Ungleichung nicht! Seien A und B die beiden Matrizen. A sei vom Typ m$\times n$ und B vom Typ n$\times p$. Weiter sei a=max$_{ik}|A_{ik}|$ und b=max$_{ik}|B_{ik}|$. Dann folgt $|(\mathrm{AB})_{ik}| = |\Sigma_r A_{ir} B_{rk}| \leq \Sigma_r |A_{ir}||B_{rk}| \leq nab$. Und es gilt Gleichheit, wenn $\mathrm{A}_{ir} = a$ und $\mathrm{B}_{rk} = b$. Das bedeutet aber, dass gilt:

$$||AB||_\infty \leq n||A||_\infty ||B||_\infty$$

Und die Konstante kann nicht verkleinert werden!

Jetzt noch ein kleines **Computerprogramm**, das die Verhältnisse veranschaulicht: Es werden zwei 2×2-Matrizen M und N mit zufälligen Komponenten gewählt. Dann wird die Produktmatrix P=MN berechnet. Anschließend eine Norm dieser drei Matrizen, etw die euklidische und es wird der Punkt mit den Koordinaten (||MN||,||M||·||N||) gezeichnet. Liegt dieser Punkt oberhalb der Geraden y=x, dann ist die Ungleichung erfüllt. Je weiter entfern er davon liegt, umso besser. Das Ganze wird wiederholt, d.h. es werden viele solche Punkte gezeichnet.

Im Programm selbst sind eigentlich nur die drei durch #### herausgehobenen Stellen relevant, Der Rest ist Koordinaten zeichnen und die Schleife aufbauen.

In $\boxed{\text{Procedure laden}}$ werden die Matrixkomponenten von M unde N zufällig gewählt und die Komponenten der Produktmatrix werden berechnet. Die Komponente M_{11} wird im Programm M11 genannt usw.

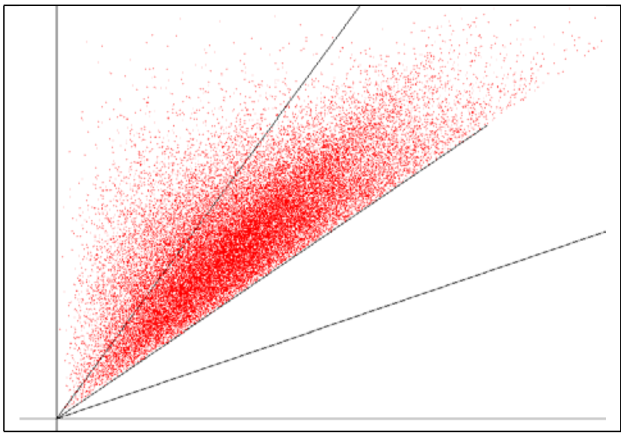
In $\boxed{\text{Procedure neuklid}}$ werden die euklidischen Normen der drei Matrizen berechnet. Die Werte werden als Werte der Parameter me,ne und pe im Programm gespeichert.

Schließlich wird der zugehörige Punkt gezeichne. Ist ||M||||N|>||MN||, d.h. ist die Ungleichung verletzt, dann wird der Punkt blau, sonst rot gezeichnet.

Nimmt man statt neuklid das Unterprogramm nl1, dann werden die entsprechenden Verhältnisse für die L1-Norm gezeichnet. nsup steht für Supremumsnorm und nl3 füe eine weitere Norm, nämlich $||\vec{x}|| = \sqrt[3]{\Sigma|x_i|^3}$. Alle nicht entfalteten (jeweils dreizeiligen) Unterprogramme können Sie leicht selbst schreiben. Das Bild zeigt das Ergebnis eines Laufes für die euklidische Norm.

```
PROCEDURE demo
COLOR 0
a = -1
E = 3
O = 3
u = -1
d = E - a
h = O - u
drawp(a,0,E,0)
drawp(0,u,0,O)
drawp(0,0,2,2)
drawp(0,0,2,4)
drawp(0,0,4,2)
```

```
COLOR clr
DO
GOSUB laden            //####
GOSUB neuklid          //####
// GOSUB nsup
//GOSUB nl3
// GOSUB nl1
IF pe > me * ne
COLOR clb
ELSE
COLOR clr
ENDIF
drawpm(pe,me * ne)     //####
EXIT IF MOUSEK > 0
LOOP
RETURN
PROCEDURE laden
m11 = 2 * RND(0) - 1
m12 = 2 * RND(0) - 1
m21 = 2 * RND(0) - 1
m22 = 2 * RND(0) - 1
n11 = 2 * RND(0) - 1
n12 = 2 * RND(0) - 1
n21 = 2 * RND(0) - 1
n22 = 2 * RND(0) - 1
p11 = m11 * n11 + m12 * n21
p12 = m11 * n12 + m12 * n22
p21 = m21 * n11 + m22 * n21
p22 = m21 * n12 + m22 * n22
RETURN
PROCEDURE neuklid
me = SQR(m11 ^2 + m12 ^2 + m21 ^2 + m22 ^2)
ne = SQR(n11 ^2 + n12 ^2 + n21 ^2 + n22 ^2)
pe = SQR(p11 ^2 + p12 ^2 + p21 ^2 + p22 ^2)
RETURN
> PROCEDURE nsup
> PROCEDURE nl3
> PROCEDURE nl1
```



Gezeichnet sind knapp
40000 Punkte!
Die Ungleichung ist
immer erfüllt.
Horizontal $||\mathrm{MN}||_{Euklid}$
Vertikal $||\mathrm{M}||_{Euklid}||N||_{Euklid}$
Grenze: y=x