Zur **Klausurvorbereitung** 7.Januar
(ich hoffe, ohne zu viele Flüchtigkeitsfehler und wünsche angenehme Tage.)

Kap. 13: Variationsrechnung.
Begriffsverständnis / zugehöriger Formalismus.
■1) Welcher Unterschied besteht bei korrekter Schreibweise zwischen der Lagrangefunktion L und der Größe $L(t,\vec{x},\vec{v})$?

Antwortbeispiel: L bezeichnet das Abbildungstripel und $L(t,\vec{x},\vec{v})$ einen zugehörigen Wert. (t,$\vec{x}$,$\vec{v}$) ist dabei ein beliebiger Punkt im erweiterten Phasenraum.

Oder: L ist Skalarfeld Feld auf dem erweiterten Phasenraum, L(t,$\vec{x}$,$\vec{v}$) zugehöiger Wert (aus $\mathbb{R}$)

■ 2) Welches bereits in der Schule behandelte mathematische Problem wird durch die Variationsrechnung verallgemeinert?
■ 3) Was benötigt man zur Konstruktion eines Wirkungsfunktionals und wie sieht diese Konstruktion aus?
■ 4) Geben Sie ein Beispiel einer Funktionsfolgen, die stark gegen Null konvergiert, schwach aber divergiert. Hat man auch L^1-Konvergenz?
■ 5) Welche Größen sollte zum Einstieg in ein Variationsproblem zunächst einmal bestimmen? Beispiel: N=1 und L(t,x,v)=$\frac{v^2}{2x^2}$
5a) Wähle zu diesem L die Randwerte x(0)=x(1)=H>0. Was läßt sich durch reine Inspektion des Wirkungsfunktionales über die Lösung des zugehörigen Variationsproblems sagen bzw. vermuten! Dasselbe für x(0)=h und x(1)=H
5b) Wie wird man die Lösung angehen? Stategiebeschreibung
5c) Führen Sie die (weitgehend triviale) Rechnung aus!
5d) Bestimmen Sie für die Extremalenschar durch (0,h) auch den Wert des Wirkungsfunktionales (als Funktion des Endpunktes (X,T). Was ergeben die partiellen Ableitungen von S(T,X)?
5e) Ist eines der Resultate über die hinreichenden Bedingungen anwendbar?
■ 6) Was versteht man unter einem Bewegungsintegral, was leistet ein solches? Wann kann man durch Inpektion von L ein Bewegungsintegral erkennen?
■ 7) Bestimmung einer Lagrangefunktion: In kartesischen Koordinanten sei $\vec{g}=(0,0,-g)$ und $\vec{a}(t)=A\vec{e}_1\sin(\Omega t)$. Dann sei $\vec{a}$ der Aufhängepunkt eines (in der 1-3-Ebene) ebenen Punktpendels der Länge L und Masse M. Führen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate q ein und bestimmen Sie die zugehörige Lagrangefunktion und die ELG. (Skizze nicht vergessen!)
a) Angenommen, Sie möchten auch die Zwangskraft des Systems bestimmen. Wie gehen Sie dann vor?
■ 8) Wie lautet die allgemeine Variationsformel? Was erhält man für das totale Differential dS? . REchnen Sie dazu das folgende Beispiel: Die in 5a bestimmte (0,h) und (1,H) verbindende Extremale g=([0,1],t$\mapsto g(t),\mathbb{R}$) wird ersetzt durch $\gamma=([0,\frac{11}{10}],t\mapsto g(t)+0.1t,\mathbb{R})$. Bestimmen Sie das zugehörige dS. Wenn möglich, auch dS_{exakt} bestimmen.
■ 9) Variation mit Nebenbedingungen, Lagrangesche Multiplikatoren. Allgemeines Vorgehen.
a) Beispiel: Für $x_1+x_2+x_3=2\pi$ bestimme die Extremwerte von $f(x_1,x_2,x_3)=\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3$. Und $x_i\in[0,2\pi]$
■ 10) Koordinatenwechsel und Umparametrisierrung. Wieso ist das Bogenlängenfunktional invariant gegen Umparametrisierungen?
■ 11) Es sei L Lagrangefunktion. Wir haben diskutiert, wie man dann zum kanonischen Formalismus übergegangen ist. Können Sie umgekehrt bei gebenem (t,x,p)$\mapsto H(t,x,p)$ zum Lagrangformalismus übergehen, also (t,x,v)$\mapsto L(t,x,v)$ bestimmen?
a)b Allgemein überlegen, dann einfaches Beispiel rechnen!

Kap. 14: Integration
■ 11) Begriffe: Was versteht man unter einem Maßraum?
a) E={1,2,3}. Konstruieren Sie ein nicht triviales Beispiel eines zugehörigen Maßraumes (Was ist nur festzulegen?). Sei f:E$\to V^3$. Berechnen Sie $\int_E d\mu$f.
b) Lebesguemaß von $\mathbb{R}$.

b) Was versteht man unter einem Wahrscheinlichkeitsraum?

c) Lebesgue-Stieltjes-Maße. Beispiele? Vorgabe.

■ 12) L^1-Konvergenz, Unterschied und Beziehung zu gleichmäßiger und punktweiser Konvergenz. Nachweis von L^1-Konvergenz. Wie geht man vor? Die Voraussetzungen der beiden Theoreme

■ 13) Welcher Unterschied besteht zwischen "additiv" und "$\sigma - additiv$". Man bezieht das nicht nur auf Maße, sondern auch auf Eigenschaften. Nennen Sie ein Beispiel einer additiven, aber nicht σ-additiven Eigenschaft.

a) Was leistet das Begriffspaar im Zusammenhang mit unendlichen Reihen?

■ 14) Existenz/Konvergenz von Integralen. Konvergiert $\int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$? Und wie steht es mit $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}$?Wieso sind diese Beispiele für die Frage besonders interessant?

■ 15) Cantormenge mit "fünf" statt "drei" . Wie könnten man vorgehen?

■ 16) Fubini-Tonelli

■ 17) Substitutionsregel

■ 18) Flächenintegrale und Gauß

■ 19) Bestimmen Sie den Schwerpunkt einer Halbkugel mit Radius R.

a) Was für ein Ergebnis erwarten Sie?

b) Angenommen Sie erhalten als Ergebnis $\vec{x}_S = \frac{3}{4}R(0,0,1)$. Ihr Nachbar dagegen $\vec{x}_S = \frac{3}{8}R^3(0,0,1)$ Akzeptieren Sie die Ergebnisse?

c) Berechnen Sie $\vec{x}_S$. (Das sollte in 5, maximal 10 Minuten gehen.

d) Die Halbkugel sei homogen mit Masse der Dichte ρ gefüllt. Auf der Achse (oberhalb der Schnittfläche) befinde sich ein Massenpunkt der Masse M. Formulieren Sie die Integralformel für die Anziehungskreaft der beiden Massen. Formulieren Sie ein naheliegendes Ersatzmodell (mit noch unbestimmtem Korrekturfaktor) für dies System.

■ 20) Es sei E eine nicht leere eine Menge. P und Q seien zwei endliche Partitionen von E. Zeigen Sie, dass es eine dritte endliche Partition S gibt, die feiner als P und auch feiner als Q ist.

Definition: P=$\{p_i\}$ und Q=$\{q_j\}$ Partitonen von E. Dann heißt P feiner als Q, wenn es zu jedem $p_i \in P$ ein $q_j \in Q$ gibt, mit $p_i \subset q_j$.

a) Machen Sie eine Skizze, die den Inhalt der Definition verdeutlicht.

b) Formulieren Sie, was zu beweisen ist

c) Führen Sie den Beweis.

■ 21) Sie überdecken eine Figur X in der Ebene geeignet mit Kreisen vom Radius δ und zählen nicht die Anzahl der benötigten Kreise, sondern summieren deren Flächeninhalte. Das ergebe M(δ). Jetzt tragen Sie lnM(δ) gegen -lnδ auf und finden, dass sich näherungsweise eine Gerade mit Steigung $m_X = 1.6$ ergibt. Welche Dimension vermuten Sie für X ? (Hinweis: Wie sähe m_x aus, wenn Sie alternativ die Durchmesser, bzw. die Anzahlen addiert hätten? Was würden diese Experimente ergeben, wenn X eine glatte Kurve wäre?

1) Liegt eine Singularität des Vektorfeldes $\vec{v}$ im Inneren des Örpers K oder auf dessen Rand, dann ist der Gaußsche Satz nicht auf ganz K anwendbar, selbst wenn die beteiligten Integrale existieren.

a) Verifizieren Sie Aussage zur Singularität auf dem Rande an folgendem Beipiel:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \gamma\frac{|\vec{x}|}{r^3} \quad \text{und} \quad \text{K: } 0 \le r \le 1, 0 \le \theta, \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

b) Korrektes Vorgehen: Keinen Teil von K herausschneiden, der die Singularität enthält, so dass der Satz anwendbar ist. Dann zum Grenzwert übergehen: (Meist, ist es sinnvoll den in K leigenden Teil einer Kugel vom Radius ε herauszuschneiden!)

c) Inspizieren Sie, welche Glattheitseigenschaft daher in den Lehrbüchern zusätzlich für das Vektorfeld $\vec{v}$ gefordert wird. *Man darf also im Zusammenhang mit dem Gaußschen Satz nicht wie sonst in der Integrationstheorie Mengen vom Maße Null einfach vernachlässigen!.* Etwa: Die Divergenz verschwindet in K bis auf eine Menge vom Maße Null.

Kap 15

■ 22) Berechnen Sie Krümmungsfunktion und begleitendes Zweibein einer Ellipse

■ 23) Wir betrachten einen geschlossenen doppelpunktfreien Kurvenzug w und einen Punkt P im Innern. Ist der "mittlere (skalare) Abstand" von P zu den Punkten von w eine geometrische oder eine kinematische Größe?

■ 24) Bestimmen Sie (nach dem Schema) Krümmung und Torsion für $\vec{r}(t) = r(\cos t, \sin t, a\cos(2\mathrm{t}))$. Wie sieht der hierdurch beschriebene geometrische Kurvenzug aus?