Fragen zur Klausurvorbereitung

1. Klausur HMII 2003

Fingerübungsfragen

- Was für Konsequenzen hat es, wenn eine (gewöhnliche) Differentialgleichung
  - linear und explizit ist?
  - linear, explizit und autonom ist?
  - nicht explizit ist? (Illustration am Beispiel $(\mathrm{y}'(x))^2 = 1$)
- Wann hat man (lokal) eine Partition des Phasenraumes vorliegen?
- Eine (gew.) Differentialgl. 3. Ordnung habe einen zweidimensionalen Phasenraum. Was erwarten Sie für die allgemeine Lösung? Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist der Idealfall gesichert?
- Für welche Differentialgleichungen ist die e^{tM}-Lösungsformel gültig?
- Was versteht man unter dem *Eigenwertproblem für einen Endomorphismus?*
- Wie benutzt man das Eigenwertproblem zur Lösung linearer autonomer (gew. expliziter) Differentialgleichungen?
- Wieso darf man in der letzten Frage *autonom* nicht fortlassen?
- Wie lautet die allgemeine Lösung von $\boxed{\mathrm{u}'(x) = Au(x)}$ mit N=1.
- Wie lautet die allgemeine Lösung von $\mathrm{u}''(x) + 0.2u'(x) + 2u(x) = 0$?
- Wie lautet die allgemeine Lösung von $\mathrm{u}''(x) + 0.2u'(x) - 2u(x) = 0$?
- Wie prüft man üblicherweise die Gültigkeit einer Lipschitzbedingung?
  - Beispiel, für das die Lipschitzbed. nicht erfüllt ist.
- Bringen Sie $\mathrm{xy}'(x) = 2y^2(x) + 1$ in Separationsform
  - Rechnen Sie bis zur Anfangswertform der Lösung.
- Sei $\ddot{x}(t) + 4x(t) = F(t)$ mit $\mathrm{F(t)=t}^2 + 4$. Was für einen Lösungsansatz liefert die Faustregel?
  - Jetzt sei $\mathrm{F(t)=Asin}(\Omega t)$. Welchen Ansatz machen Sie ? Für welchen Parameterwert erwarten Sie Ärger?
- Was sagt der Komplexifizierungssatz für die Lösungen der Gleichung $\mathrm{u}''(x)+2au'(x)+b^2u(x) = 0$ aus? Für welche Parameterbereiche wird der Satz relevant?
  - Ist die Methode anwendbar, wenn a=1+i ist?
- Wie sieht die Anwendung der Komplexifizierungsmethode auf $\mathrm{u}''(x) + 2au'(x) + b^2u(x) = D\cos(\alpha x)$ aus?
  - Und auf $\mathrm{u}''(x) + 2au'(x) + b^2u(x) = De^{-\beta x}\cos(\alpha x)$?
- $\mathrm{u}''(t)+2au'(t)+b^2u(t) = 0$. Sie wollen ein illustratives Computerbild einer Lösung erstellen. Diese soll den Schwingungsfall darstellen. Im Bereich $0 \leq t \leq 10$ sollen etwa 3 Schwingungen auftreten und die Amplitude soll dabei etwa auf 1/4 ihres Anfangswertes abfallen. Wie groß sind a und b zu wählen?
  - Wie groß ist in diesem Beispiel der Unterschied zwischen ω und ω_0?
- $\mathrm{y}'(x) = y^2(x) + Ax$. Nehmen Sie die Substitution $\mathrm{y(x)}=\alpha u(\beta x)$ vor. Differentialgleichung für u?

- Wie sieht allgemein die Strategie bei einer Substitution aus?
- Gegeben ein Vektorfeld $(\mathrm{V}_0^3, \vec{x} \mapsto \vec{v}(\vec{x}), V^3)$. Wie erhält man die Feldlinien dieses Feldes?
  - $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}$ mit $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. Die Feldlinien ohne Rechnung!
  - Und was ist, wenn $\vec{\omega} = \vec{0}$?
- Die Differentialgleichung $\mathrm{y}'(x) = 2x$ beschreibt ein (einfaches) gewöhnliches deterministisches System. Geben Sie die 3 Erscheinungsformen dieses Systems an. Dabei soll die Graphenpartition sowohl in der Anfangswertform als auch in der Scharform angegeben werden.
  - Wie erhält man die Orthogonaltrajektorien dieser Kurvenschar?
  - Beispiel: Schar sei $\mathrm{y}=\alpha x^2$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Anfangswertform? Welche Punkte werden nicht erreicht? Orthogonaltrajektorien, auch Anfangswertform.
- Was ist ein Fixpunkt (eines Operators)? Welche Beziehung besteht zum Eigenwertbegriff?

Fragen mit etwas Rechnung

- (1) Lösen Sie $\mathrm{u}^{(4)}(x) + u(x) = 0$ mit einem Eigenwertansatz.
- (2) Lösen Sie für $\boxed{\mathrm{y}'(\mathrm{x})+2\mathrm{y}(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x})}$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases} 0 & \text{für x} \leq 0 \\ xe^{-x} & \text{für x} \geq 0 \end{cases}$ die Anfangswertaufgabe y(-1)=0. Welche Glattheitseigenschaft hat die Lösung?
- (3) Was ergibt der *Reduktionstrick* für die folgenden Differentialgleichungen?
  - a) $2\mathrm{y}''(x) - x^2 y'(x) + 4y(x) = 0$
  - b) $\mathrm{y(x)y}''(x) = x^2$
  - c) $(\vec{a} \cdot \vec{y}^{(''')}(x)) = \vec{y}^2(x)$
- Was erwarten Sie im Fall a) für des Verhalten der Lösungen in der Nähe von x=0?
- Machen Sie für den Fall b) für die Anfangswertaufgabe $\mathrm{y}(0)=\mathrm{y}_0$ und $\mathrm{y}'(0) = v_0$ einen Potenzreihenansatz. Es sei $\mathrm{y}_0, v_0 \neq 0$. Bestimmen Sie die ersten drei Koeffizienten des Ansatzes und machen Sie plausibel, dass sich auch die übrigen Koeffizienten bestimmen lassen. Die Gleichung ist nicht linear. Welche Konsequenz hat das für die Lösung?
  - Was ist für den ausgelassenen Fall $\mathrm{y}_0 = v_0 = 0$ zu befürchten?
- Was läßt sich im Fall c) über die allgemeine Lösung sagen?
- (4) Lösen Sie mit Separation: $Y'(x) = \sin(Y(x))$.
- Sei $\mathrm{F}=\left(\mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+y^3 \\ xy \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2\right)$. Weiter sei $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ist F in $(\vec{u}_1, F(\vec{u}_1))$ lokal invertierbar? Wie steht es mit $(\mathrm{u}_2, F(u_2))$?
- Sei $\mathrm{G}=(\mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ xyz \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2)$. Wo kann man lokal nach y und z auflösen?
- Es sei M eine r×r-Matrix und N eine s×s-Matrix. Weiter sei

  $$B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

  die daraus gebildete *Blockmatrix.* Die beiden 0-Einträge stehen daher für je eine r×s- und s×r-Nullmatrix. Beweisen Sie mit Hilfe der äußeren Algebra, dass $\boxed{\det B = \det M \cdot \det N}$ gilt.

- Die Formel folgt auch leicht über den allgemeinen Entwicklungssatz. Wie geht das?
- Läßt sich das Resultat auf *Dreiecksklockmatrizen* verallgemeinern

- Sei M:$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

  Weiter sei R=123 und S=234. Bestimmen Sie die beiden Matrixelemente M_{RS} und M_{SR} der Erweiterung von M auf die äußere Algebra $\wedge R^4$.

  - Bestimen Sie detM durch direkte Rechnung in der äußeren Algebra
  - Bestimmen Sie detM nochmals durch Anwenden der üblichen Methoden.

Sei n=dimV=3 und $\in_{ijk}$ der übliche ε-Tensor. Wir btrachten die folgende Gleichung

$$\varepsilon_{rst} \det(T) = \Sigma_{ijk} T_{ri} T_{sj} T_{tk} \varepsilon_{ijk}$$

Diese Gleichung kann auf zwei Weisen gelesen werden. Einmal unter dem Stichwort "Entwicklungsformel einer Determinante" und einmal zum Stichwort "Transformationsverhalten eines Tensors". Was folgt?

Weitere Fingerübungen

- Geometrische Interpretation der Determinante?
  - Sei $\lambda_a : \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ (Vektorprodukt). Begründen Sie ohne weitere Rechnung über die allgemeine Definition, dass $\det\lambda_a = 0$ gelten muss.
- Wie weist man mit Hilfe der äußeren Algebra die lineare Abhängigkeit einer Vektorfamilie nach?
- Sei V fünfdimensional mit Basis $\mathrm{e}_1, ..., e_5$. Wie sieht dann die übliche Basis von $\overset{2}{\wedge} V$ aus?
- Es seien (r, θ) die üblichen Polarkoordinaten der Ebene. Dann gilt $\vec{\partial}_r \wedge \vec{\partial}_\theta = m(r,\theta)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$. Bestimmen Sie m.
  - Dasselbe für $\vec{x}(\alpha, \beta) = \vec{e}_1(\alpha^2 - \beta^2) + \vec{e}_2(2\alpha\beta)$
- Die folgende Determinante läßt sich über die zwei angegebenen Schritte berechnen. Erläutern Sie die beiden Schritte und denken Sie an die Frage zu den Blockmatrizen:

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & 3 & 17 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

- Sei V=$\mathbb{R}^4$ und X der allgemeine zugehörige Zweivektor. Genauer

$$X = e_1 \wedge e_2 x_{34} + e_1 \wedge e_3 x_{24} + e_1 \wedge e_4 x_{23} + e_2 \wedge e_3 x_{14} + e_2 \wedge e_4 x_{13} + e_3 \wedge e_4 x_{12}$$

Berechnen Sie $X \wedge X$.

- Für eine quadratische Matrix Q gelte $\mathrm{Q}^2 = Q$. Was folgt für detQ?

Indexkalkül

- Schreiben Sie die lineare Differentialgreichung $\boxed{\vec{y}'(t) = A.\vec{y}(t)}$ im Indexkalkül.
- Berechnen Sie im Indexkalül div($s\vec{v}$) und rot($s\vec{v}$)
- Beweisen Sie $(\mathrm{MN})^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ (für invertierbare Matrizen M und N) mit Hilfe des Indexkalküls
- Es sei $\lambda = \Sigma e_i^* \lambda_i$ und $\vec{x} = \Sigma \vec{e}_k x_k$ mit $\lambda \in V^*$ und $\vec{x} \in V$. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass dann $\Sigma \lambda_i x_i$ gegen Basiswechsel invariant ist. D.h., dass gilt $\Sigma \lambda_i^N x_i^N = \Sigma \lambda_i^A x_i^A$.
- Es seien M_{ijk} die Komponenten eines Tensors aus $\mathrm{V}^* \otimes V \otimes V$. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass sich die Größen $\mathrm{C}_k = \Sigma_i M_{iik}$ wie die Komponenten eines Vektors aud V transformieren.
- Sei M=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie ${}^t\vec{x}M\vec{y}$ aus.