Höhere Mathematik II   Zweite Klausur   19.7.2001

Mit Antworten und Kommentaren

Die Resultate sind leider ausgesprochen schwach. Die erste Frage beispielsweise wurde zwei Wochen zu Beginn jeder Veranstaltung durchgegangen und als wichtig angegeben - Trotzdem - meist keinerlei Erinnerung oder Fähigkeit zu einer Antwort.

Eine schwere Niederlage im Kampf gegen das permanente Vergessen

Deutlich schlechter als erhofft.

Dieses Mal: *Ohne Hilfsmittel* - 1 Stunde: 12 Fragen a 3 Minuten - etwa 40 Minuten + 15 Minuten für Frage 13.

■ 1) Was versteht man unter einem *unitären Vektorraum* ?

▼ Ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit positiv definiter hermitescher Sesquilinarform

■ 2) Welche Beziehung besteht zwischen den Begriffen *quadratische Form* und *Bilinearform* ? (Zwei Richtungen)

▼ Ist B (reelle) Bilinearform, dann ist $q_B(x) = B(x,x)$ quadratische Form.

▼ Ist q quadratische Form, dann ist $q(x+y) - q(x) - q(y)$ **symmetrische** Bilinearform.

■ 3) V sei euklidischer Raum mit Skalarprodukt S. Wie lautet die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* ?

▼

$$|S(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{wobei } \|x\| \sqrt{S(x,x)}.$$

■ 4) Es sei V unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt B und a_i eine Basis von V. Weiter sei $z = \Sigma a_i z_i$ die Basisdarstellung von $z \in V$. Geben Sie eine Formel für die Komponenten z_i.

$\boxed{z_i = B(a_i, z)}$ Dutzendfach gesagt, gefragt...

■ 5) Es sei V euklidischer Vektorraum mit Basis a_i. Wir setzen $g_{ik} = a_i \cdot a_k$. Insbesondere gelte $g_{kk} = 1$ für alle k. Jetzt findet sich die folgende Rechnung:

$$g_{ik} g_{km} = a_i a_k a_k a_m = a_i a_m.$$

Kommentieren Sie das.

▼ **Offensichtlicher Unsinn!** Das Skalarprodukt ist **nicht assoziativ**, das Fortlassen der Klammer bereits ein Sündenfall. (Die Gleichung wurde einigen Ihrer Übungen entnommen. Hoch lebe die Feuerwehr und der Nachwuchs, die das erkannten, wogegen der Rest....)

■ 6) Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ seien zwei windschiefe Geraden g und h in Form von Parametrisierungen gegeben. Beschreiben Sie, wie Sie den kürzesten Abstand von g und h gewinnen können. (Das Vorgehen, nicht die Rechnung.)

▼ Einfachste Methode: Abstandsvektor eines Punktes auf g zu einem Punkt auf h bilden und parametrisieren. Quadrat der Länge minimieren, also Ableitung nach den Parametern Null setzen.

▼ Sonst muss man daran denken, dass die Normale zu den Richtungen von g und h (und der davon aufgespannten Ebene E) hier zweidimensional ist. Beliebigen Abstandsvektor in parallele und senkrechte Komponente zu E zerlegen.

■ 7) Sei V Vektorraum und $u: V \to V$ linear. Was versteht man unter der *zu u gehörigen Eigenwertgleichung ?*

▼ $u(x) = \lambda x$

■ 8) Sei $K = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

▼ $\chi(x) = (a-x)^2$. Nur ein Eigenwert a mit eindimensionalem Eigenraum, der von $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Nicht diagonalisierbar.

■ 9) u:V→ V Endomorphismus, V endlichdimensional über dem Körper K. Was versteht man unter dem Spektrum von u, der charakteristischen Gleichung von u und wie hängen beide zusammen?

▼ Das Spektrum ist die Menge der Eigenwerte (in K), die charakteristische Gleichung ist det(u-$\lambda id) = 0$ und das Spektrum besteht aus allen Nullstellen von $\chi_u(x)$, die in K liegen.

■ 10) Sei $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des euklidischen $\mathbb{R}^2$. Geben Sie (mit Hilfe der Transformationsmatrix T) die reziproke Basis. $\vec{a}^1, \vec{a}^2$ an.

$$▼ \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{T}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}^1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ 11) Es sei Y$\in V_0 \otimes V_0 \otimes V_0^*$ ein Tensor. Wie transformieren sich seine Komponenten? (Formel!)

$$▼ \quad \text{Mit Indizes!} \qquad \mathrm{Y}^N_{ikr} = \Sigma_{abc} T_{ia} T_{kb}\ {}^tT^{-1}_{sc} Y^A_{abc}$$

■ 12) Sei x$\in V_0$ und $\lambda \in V_0^*$ mit x=$\Sigma a_i x_i$ und $\lambda = \Sigma a_i^* \lambda_i$, wobei a$_i$ eine Basis von V$_0$ ist. Beweisen Sie, dass $\Sigma \lambda_i x_i$ unabhängig von der Basiswahl ist. (Z.B., indem Sie beweisen, dass $\Sigma\lambda_i x_i = \Sigma\lambda_k^N x_k^N$ gilt.)

▼ Es ist $\lambda_i^N = \Sigma\ {}^tT^{-1}_{ik}\lambda_k$ und x$_i^N = \Sigma T_{ir} x_r$. Also

$$\Sigma\lambda_i x_i = \Sigma\lambda_k^N\ {}^tT^{-1}_{ik} T_{ir} x_r^N = \Sigma\lambda_k^N \left(\Sigma_i T^{-1}_{ki} T_{ir}\right) x_r^N = \Sigma\lambda_k^N \delta_{kr} x_r^N = \Sigma\lambda_k^N x_k^N$$

■ 13 Erläutern Sie in der folgenden Rechnung die gekennzeichneten Zeilen (2-5). Wie entstehen sie aus der vorausgegangenen Zeile?

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\vec{x}) &= (\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x} + \vec{x}^2(\vec{a}\times\vec{x}) && \vec{a}\text{ konstant.} \\
v_i &= \Sigma a_k x_k x_i + \Sigma_{mjk} x_m^2 \varepsilon_{ijk} a_j x_k && (1) \\
\Sigma\partial_i v_i &= \Sigma a_k \partial_i x_k x_i + \Sigma_{mjk}\partial_i x_m^2 \varepsilon_{ijk} a_j x_k \\
&= \Sigma a_k \left[(\partial_i x_k)\, x_i + x_k\,(\partial_i x_i)\right] + \Sigma_{mjk}\left[\left(\partial_i x_m^2\right)\varepsilon_{ijk} a_j x_k + x_m^2 \varepsilon_{ijk} a_j\,(\partial_i x_k)\right] && (2) \\
&= \Sigma a_k \left[(\delta_{ik})\, x_i + x_k\,(\delta_{ii})\right] + \Sigma_{mjk}(2x_m\delta_{mi})\varepsilon_{ijk} a_j x_k + \Sigma_{mjk} x_m^2 \varepsilon_{ijk} a_j \delta_{ki} && (3) \\
&= \Sigma a_k x_k + 3\Sigma a_k x_k + 0 + 0 && (4) \\
&= 4\vec{a}\cdot\vec{x}. && (5)
\end{aligned}$$

(1) Antwortbeispiel: " Das Vektorfeld $\vec{v}$ wird im Indexkalkül dargestellt".

▼ (2) Anwenden der Produktregel

▼ (3) Es gilt $\partial_i x_j = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

▼ (4) Σ_{ik} x$_i \varepsilon_{ijk} x_k = 0$, da ε_{ijk} in (i,k) antisymmetrisch. $\Sigma_i \delta_{ii} = 3!$

▼ (5) Ergebnis wird koordinatenunabhängig formuliert.

■ Wie lautet das Endergebnis der Rechnung (Endform)? Was wurde berechnet?

$$▼ \quad div\vec{v}(x) = 4(\vec{a}\cdot\vec{x})$$