■ 1) Bestimmen Sie die (komplexen) Lösungen der Gleichung sinz=2. (Hinweis: sinz durch u=e^{iz} ausdrücken, Bestimmungsgleichung für u)

■ 2) Wie lautet die Laurententwicklung der Funktion s(z)=sin($\frac{1}{z}$). In welchem Bereich konvergiert sie? Was für eine Singularität liegt bei z=0 vor?

■ 3) Sei q:z$\mapsto w = z^2$. Gehen Sie vom Zuordnungsstandpunkt aus, d.h. von je einer Skizze der z und der w-Ebene. Bestimmen Sie ein Gebiet G in der z-Ebene, das die positiv reelle Achse enthält und das durch q bijektiv auf die entlang der negativ reellen Achse aufgeschnittenen w-Ebene abgebildet wird.

■ 4) Berechnen Sie das folgende Integral mit der Residuenmethode

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$$

■ 5) Sei

$$I(r) = \oint_{|z|=r} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{iz}}{z^2}.$$

Berechnen sie dieses Integral mit Hilfe des Residuensatzes und wandeln Sie es über z=r$e^{i\alpha}$ in ein Parameterintegral um. Welche reellen Integrale erhalten Sie so?

■ 6) Das Maximumsprinzip für den Realteil:

Gehen Sie von der Cauchyschen Integraldarstellung einer holomorphen Funktion aus und führen Sie darin Polarkoordinaten ein:

$$f(z) = \oint \frac{du}{2\pi i} \frac{f(u)}{u-z} \qquad \text{u=z+r}e^{i\alpha}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass auch für den Realteil und den Imaginärteil von f ein Maximumsprinzip gilt (f=U+iV).

■ 7) Die Funktion f mit f(x)=0 für x<0 habe die Laplacetransformierte F(p). Was läßt sich dann über die Laplacetransformierte der Funktion x$\mapsto xf(x-a)$ mit a>0 aussagen?

■ 8) Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt zwischen -1 und +1.

□ a) Wie lautet die zugehörige Dichte $\varphi_X(x)$ und ie zugehörige Verteilungsfunktion $\Phi_X(x)$?

□ b) Wie groß ist die Streuung dieser Verteilung? Machen Sie dazu eine erläuternde Skizze.

□ c) Bestimmen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion alle zentralen Momente der Verteilung. (Test? Zulässig?)

■ 9) Sie werfen eine Münze 100 mal und finden dabei 59 mal Kopf und 41 mal Zahl.

a) Ist das mit der einfachen Fluktuationsschätzung vereinbar?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, höchstens 41 mal Zahl zu erhalten. (Formel, die mit einem Computeralgebrasystem auswertbar ist, genügt.)

■ 10) X sei gleichverteilt zwischen -1 und +1. Jetzt wollen Sie die Verteilungsfunktion von $X \cdot X$ - genauer $X(e_1)X(e_2)$ - bestimmen. Wie müssen Sie dazu vorgehen? (Hinweis: relevant ist: $\Phi(z) = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} dy$ Dazu eine Skizze machen.) Bestimmen Sie die resultierende Verteilung und Dichte und skizzieren Sie für beide den Graphen.

Resultate und einige Lösungen

Zuerst ein Kommentar: Erschreckend, wie umständlich die meisten von Ihnen immer noch rechnen, nach dem Motto, nur ja nichts aufarbeiten und bei diesbezüglichen Ratschlägen möglichst das Gegenteil machen. Die erste Aufgabe bildet ein Beispiel und generell die Mehrzahl der Integrationen. Das Ergebnis ist ihr vielfach enormer Zeitbedarf

■ 1) Bestimmen Sie die (komplexen) Lösungen der Gleichung sinz=2. (Hinweis: sinz durch u=e^{iz} ausdrücken, Bestimmungsgleichung für u)

Sei u=e^{iz} (Hinweis). Ergibt eine quadratisch Bedingungsgleichung:

$$u - \frac{1}{u} = 4i \quad \text{mit } u=e^{iz} \text{ oder } \boxed{u^2\text{-}4iu\text{-}1=0}$$

$$\boxed{u_{12}=2i\pm\sqrt{-3}=i(2\pm\sqrt{3})}$$

Rückeinsetzen gibt

$$\begin{aligned} e^{iz} &= i(2\pm\sqrt{3}) \\ i(z+2\pi n) &= \ln\left[i(2\pm\sqrt{3})\right] \qquad n\in\mathbb{Z} \text{ frei} \end{aligned}$$

Das gibt laut Definition des Logaritmus zwei Serien von Lösungen:

$$i(z_{12n}+2\pi n) = \ln(2\pm\sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2} = \pm\ln(2+\sqrt{3})$$

$$\boxed{z_{12n}=\frac{\pm 1}{i}\ln(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}\text{-}2\pi n}$$

Dbei wurde folgende Umrechnung benutzt, nach der man sucht, wenn man an die folgende, auch über das Identitätsprinzip folgende Symmetrieeigenschaft des Sinus denkt:

$$\sin(-z) = \frac{1}{2i}\left(e^{-iz} - e^{iz}\right) = -\sin(z)$$

Also: Wenn sin(z)=2, dann auch sin(-z)=2! $(2-\sqrt{3}=0.27.. > 0 \quad \text{und } 2^2-3=1!)$

$$\ln(2-\sqrt{3}) = -\ln\frac{1}{(2-\sqrt{3})} = -\ln(2+\sqrt{3})$$

■ 4) Berechnen Sie das folgende Integral mit der Residuenmethode

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx$$

▼

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\frac{z^2}{(z^2+9)^2} && \text{I}=\frac{1}{2}J \\ K(R) &= \int_{H_R} dz\frac{z^2}{(z^2+9)^3} && \text{Gradlemma } \lim K(R)=J \\ & && \text{Obere Halbebene} \\ K(R) &= 2\pi i\cdot \text{Res}_{z=3i}f(z) \\ f(z) &= \frac{z^2}{(z+3i)^2(z-3i)^2} = \frac{F(z)}{(z-3i)^2} && \text{F(z)}=\frac{z^2}{(z+3i)^2} \end{aligned}$$

Doppelpol bei 3i

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=3i} f(z) &= \frac{d}{dz} F(z)|_{z=3i} = \frac{18zi}{(6i)^5} = \frac{-18}{-6^3 i} = \frac{1}{i}\frac{1}{12} \qquad \text{da} \\ F'(z) &= \frac{2z(z+3i)^2 - z^2 \cdot 2(z+3i)}{(z+3i)^4} = \frac{6zi}{(z+3i)^3} \end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$J = K(R) = 2\pi i \cdot \frac{1}{i}\frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \qquad \boxed{\mathrm{I} = \frac{\pi}{12}}$$

■ 5) Sei

$$I(r) = \oint_{|z|=r} \frac{dz}{2\pi i}\frac{e^{iz}}{z^2}.$$

Berechnen sie dieses Integral mit Hilfe des Residuensatzes und wandeln Sie es über z=re$^{i\alpha}$ in ein Parameterintegral um. Welche reellen Integrale erhalten Sie so?

Der Residuenkalkül gibt sofort:

$$I(r) = 2\pi i \cdot \frac{i}{2\pi i} = i$$

Setze z=re$^{i\varphi}$ dz=d$\varphi \cdot iz$. Also

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi iz}{2\pi i}\frac{e^{iz}}{z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{re^{i\varphi}} \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r\sin\varphi} e^{i(r\cos(\varphi)-\varphi)} \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r\sin\varphi}\left(\cos(r\cos(\varphi)-\varphi) + i\sin((r\cos(\varphi)-\varphi)\right) \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r\sin\varphi}\cos(r\cos(\varphi)-\varphi) &= 0 \\ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-r\sin\varphi}\sin(r\cos(\varphi)-\varphi) &= 2\pi r \end{aligned}$$

Hier hätte man sich schon einen Kommentar gewünscht. Ist die r-Abhängigkeit trivial? Könnte man an die Integrale auf andere Weise herankommen usw.

■ 9) Sie werfen eine Münze 100 mal und finden dabei 59 mal Kopf und 41 mal Zahl.

a) Ist das mit der einfachen Fluktuationsschätzung vereinbar?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit dafür, höchstens 41 mal Zahl zu erhalten. (Formel, die mit einem Computeralgebrasystem auswertbar ist, genügt.)

▼ a) Bei der Münze ist p=q=$\frac{1}{2}$ und n=100. Der Mittelwert ist $\frac{1}{2}$ und die korrekte theoretische Streuung $\sigma_{th} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$. Die Faustregel, bei der q vernachlässigt ergibt $\sqrt{41} = 6.4$ was nict allzu stark davon abweicht. 9 ist jedenfalls noch im 2σ-Bereich enthalten

b) Wie groß ist die Wahrscheinlickeit, höchstens 41 mal die Zahl - alo 41 oder weniger - unter den 100 Würfen zu finden? Nach der Binomialverteilung ist das

$$w = \sum_{k=0}^{41}\binom{100}{k} p^{100-k} q^k = 2^{-100}\sum_{k=0}^{41}\binom{100}{k} \approx 0.044.$$

Oder weniger als 5%. Oder auch: Wirft man 1000 mal einen Hunderter Münzen, so wird man darunter nur etwa 44 Fälle vorfinden, in denen man höchstens 41mal Zahl hat. Die beiden Bilder zeigen die Dichte und die Verteilung für diesen diskreten Fall an. Die horizontale Linie geht von 0 bis100. Der hohe Strich links

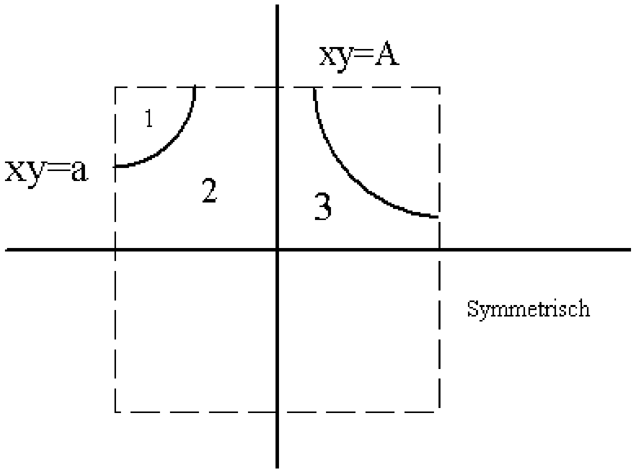
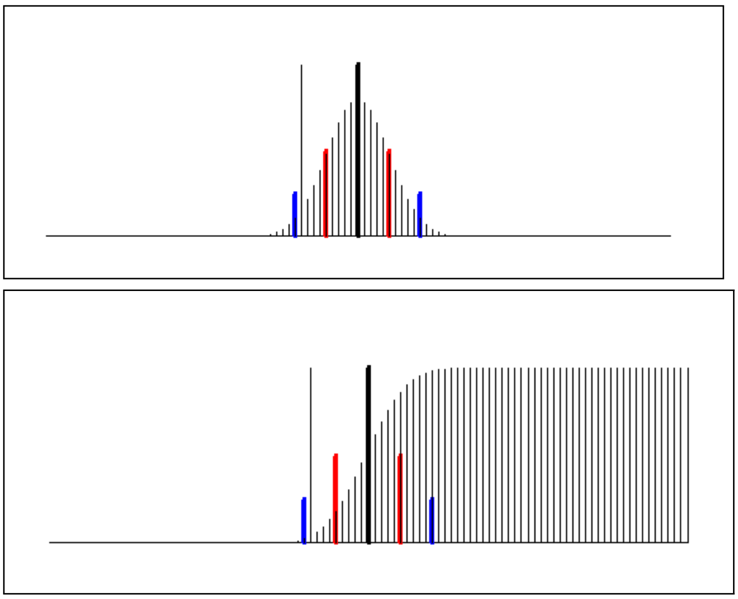


Figure 1:

gehört zum Wert 41. Rot ist der 1-σ-Bereich eingezeichnet, blau der 2-σ-Bereich. Größere Abweichungen haben alle eine von Null verschiedene Wahrscheilichkeit, die aber so klein ist, dass si im Bild nicht aufgelöst wird. Beachten Sie auch die Ähnlichkeit derForm der Verteilung mit der einber Normalverteilung.



■ 10) X sei gleichverteilt zwischen -1 und +1. Jetzt wollen Sie die Verteilungsfunktion von $X \cdot X$ - genauer $X(e_1)X(e_2)$ - bestimmen. Wie müssen Sie dazu vorgehen? (Hinweis: relevant ist: $\Phi(z) = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} dy$ Dazu eine Skizze machen.) Bestimmen Sie die resultierende Verteilung und Dichte und skizzieren Sie für beide den Graphen.

▼ Der Bereich y<0 ist symmetrisch und kann durch einen Faktor 2 in der Verteilung ersetzt werden.

Wann ist x$\cdot y \leq a$? Da Über im Quadrat Gleichverteilung (Dichte $\frac{1}{4}$) vorliegt, ist das für a<0 im Bereich 1 der Skizze der Fall. Daher gibt $\frac{1}{4} \cdot 2\cdot$Flächeninhalt von 1 gerade die Wahrscheinlichkeit einen Wert unter a zu finden. Der Rand von 1 beginnt bei (-1,a) und endet bei (a,1). Folglich (ohne Substitution, wie von Ihrer Seite vorgesclagen wurde):

$$\Phi_{XY}(a)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{a}dx\int_{\frac{a}{x}}^{1}dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{a}dx(1-\frac{a}{x})=\frac{1}{2}\left[x-a\ln|x|\right]_{-1}^{a}=\frac{1}{2}\left(a+1-a\ln|a|\right)$$

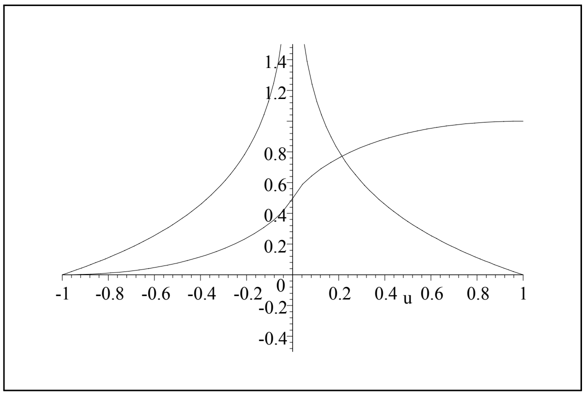
Für A>0 ist der Bereich 1+2+3 zu wählen, also

$$\begin{aligned}\Phi_{XY}(A) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1\cdot A+\int_{A}^{1}dx\int_{0}^{\frac{A}{x}}dy\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1\cdot A+\int_{A}^{1}dx(\frac{A}{x}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1\cdot A+\left[A\ln|x|-x\right]_{A}^{1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+A-A-A\ln|A|+A\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+A-A\ln|A|\right)\end{aligned}$$

Zsammen

$$\Phi_{XY}(u)=\frac{1}{2}\left(u+1-u\ln|u|\right)$$

$$\varphi_{XY}(u)=-\frac{1}{2}\ln|u|$$



Nun die Resultate. Ausgesprochen hohe Punktzahlen wurden nicht erreicht

	1(6)	2(4)	3(3)	4(5)	5(5)	6(5)	7(5)	$8_{ab}5$	5	9(5)	5	$\sum 53$
AF	3.5	4	3	5	4	4	4.5	5.5	4	2.5	4.5	44,5
TK	3	4	3	5	4	4	5	5	4.5	4.5	4.5	46.5
SR	5	3	3.5	5	4	4	4.5	5	4	3	0	41
DK	3.5	4	3	5	3	3.5	5	5	3	4	1	40
Klo	1	2	2.5	5	2	3	2.5	5	3	2	1	29
Sem	3.5	2.5	3	5	4	3.5	4	5	3	4.5	1.5	39.5
JR	3.5	2	3.5	5	3	3	4	5	3	4.5	2	38.5
Ot	3.5	3.5	2.5	5	2	3.5	3.5	3.5	3	2	0	31.5
Sa	1	1	3	5-	3	-	1	3.5-	0.5	-	-	18
JBo	5	2.5	2	4.5	4	2	3.5	3-	4	.5	0	31
VE	2.5	1	3	1	3-	-	2	2.5	2.5	1.5	0.5	19.5
PdH	3.5	0	3	5	4	4	2.5	4	0.5	3	4.5	34
SW	4.5	2.5	3	4	3.5	1	3.5	5	3	3.5	4	37.5
JD	3	0	3	3	4	3	1.5	4.5	3.5	3.5	1	30.5
HV	0	.5-!-!	.5	3	0.5	1	.5	3.5	2	3.5	0	15
	43	32.5	41.5	65	48	39.5	47.5	65.5	43.5	42.5	24.5	
	48%	54%	92%	87	64	53	63	87	58	57	33	

						x				
			x			x	x	x		
			x			x	x	x		
			x		x	x	x	x	x	
4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54