Das Resultat ist insgesamt als **gut** zu bezeichnen, mit einigen verbreiteten Schwächen im Vorwissen und natürlich einer größeren Zahl individueller, aber behandelbarer Individualfehler.

Klausur HMII vom 21.6.2002 samt Lösungen

■ 1) Eine Differentialgleichung sei linear, nicht autonom und dritter Ordnung mit eindimensionalem Konfigurationsraum.

a) Was läßt sich ohne Rechnung über die Lösung sagen? Was benötigt man?

b) Geben Sie ein Beispiel einer derartigen Gleichung, die zusätzlich bei t=1 (t Kontrollvariable) nicht explizit sein soll.

▲ a) Die allgemeine Lösung sollte (im homogenen Fall) einen dreidimensionalen Vektorraum bilden. Man benötigt drei unabhängige Lösungen. Im inhomogenen Fall zusätzlich eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Wenn die homogene Gleichung nicht autonom ist, hat man keine allgemeine Lösungsformel. Kandidat ist ein Potenzreihenansatz. (*Schwaches Resultat!*)

▲ b) $\boxed{(t-1)x'''(t) + x''(t) + t^2 x(t) = 0}$. Dagegen ist $\frac{1}{t-1}x'''(t) + ...$
kein gutes Beispiel. Nach Multiplikation mit (t-1) wird vielfach eine explizite Form entstehen.

■ 2) Welche der folgenden beiden Differentialgleichungen kann mit der Separationsmethode behandelt werden?

$$\boxed{(1+t)y'(t)=t^2+ty^2(t)} \qquad \boxed{(1+t)y'(t)=t^2+t^2y(t)}$$

a) Bringen Sie die Gleichung, auf die die Methode anwendbar ist, in die Separationsform.

b) Bestimmen Sie dann die allgemeine Lösung in Anfangswertform und in Scharform.
$\left[\frac{t^2}{1+t} = \frac{t^2-1+1}{t+1} = (t-1) + \frac{1}{1+t}\right]$

c) Skizzieren Sie grob das Feldverhalten der anderen Differentialgleichung im erweiterten Phasenraum.

▲ Die zweite Gleichung ist wegen $t^2 + t^2y(t)) = t^2(1 + y(t))$ separarabel.

▲ a)

$$\frac{y'(t)}{1+y(t)} = \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

▲ Integration und Umkehrung der Kettenregel geben

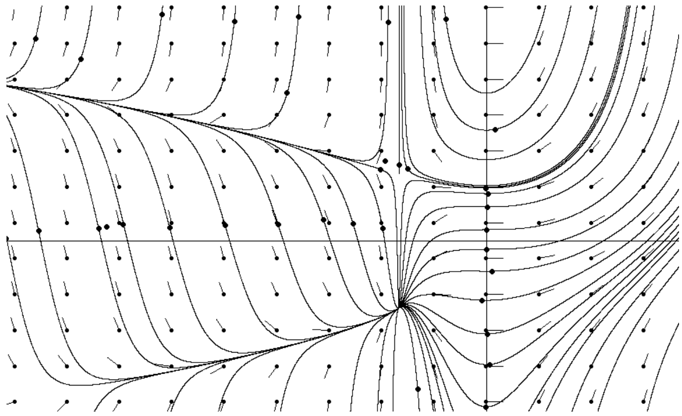
$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{1+y(t)}{1+y_0}\right| &= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\left(t^2 - t_0^2\right) + (t_0 - t) + \ln\left|\frac{1+t}{1+t_0}\right| \\
\left|\frac{1+y(t)}{1+y_0}\right| &= e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)+(t_0-t)}\left|\frac{1+t}{1+t_0}\right| \qquad \text{Vorzeichen stimmt} \\
\frac{1+y(t)}{1+y_0} &= e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)+(t_0-t)}\,\frac{1+t}{1+t_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t)=\tfrac{1+t}{1+t_0}(1+y_0)e^{\frac{1}{2}\left(t^2-t_0^2\right)+(t_0-t)} - 1} \quad \text{Anfangswertform}$$

$$\boxed{y_c(t)=c(1+t)e^{\frac{1}{2}t^2-t}-1} \quad \text{mit} \quad c = \frac{1+y_0}{1+t_0}e^{t_0-\frac{1}{2}t_0^2} \quad \text{Scharform}$$

y(t)=-1 ist kritisch, aber im Endergebnis enthalten. Auf die Vorzeichen achten. Ein Test der Anfangswertform ist immer angebracht.

▲ b) Da sollten sich einige etwas mehr Mühe geben! Andere zeigten, dass es geht. So sehen Feld und typische Trajektorien exakt aus



■ 3) Gegeben das folgende Feld auf dem erweiterten Phasenraum

$$(t, \vec{x}) \mapsto t\vec{x}^2\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{x})\vec{x}$$

Der Phasenraum sei die euklidische Ebene.

a) Wie lautet die zu diesem Feld gehörige Differentialgleichung?

b) Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ eine Orthonormalbasis mit $\vec{a} = \vec{e}_1 a$. Schreiben Sie die Differentialgleichung als Gleichungssystem (bezüglich dieser Basis).

c) Wie würde für diese Differentialgleichung ein Potenzreihenansatz (um t=0) aussehen? Versuchen Sie die ersten Terme des Reihenansatzes zu bestimmen. Ist zu erwarten, dass der Ansatz erfolgreich ist? ("Differentialgleichung", nicht das zugehörige System!)

▲ a) Bitte das "von t" nicht vergessen!

$$\vec{x}'(t) = t\vec{x}^2(t)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{x}(t))\vec{x}(t)$$

▲ b) $\vec{x}^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$ liefert die Kopplung und scheint einigen nicht bekannt.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t(x_1^2(t) + x_2^2(t))a + ax_1^2(t) = a(t+1)x_1^2(t) + atx_2^2(t) \\ x_2(t) &= ax_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

▲ c) Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{a}_o + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 t^2 + ...$. Was wird benötigt?

$\vec{x}'(t) =$	$\vec{a}_1$	$+2\vec{a}_2 t$	$+3\vec{a}_3 t^2$	$+4\vec{a}_4 t^3$
$\vec{x}^2(t) =$	$\vec{a}_0^2$	$+2\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1 t$	$+(2\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1^2)t^2$	$+...$
t$\vec{x}^2(t)\vec{a} =$		$\vec{a}_0^2 t\vec{a}$	$+2(\vec{a}_0\vec{a}_1)t^2\vec{a}$	$+(2\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_1^2)t^3\vec{a}$
$(\vec{a}\vec{x}(t)) =$	$(\vec{a}_0\vec{a})$	$+(\vec{a}_1\vec{a})t$	$+(\vec{a}_2\vec{a})t^2$	$+(\vec{a}_3\vec{a})t^3$
$(\vec{a}\vec{x}(t))\vec{x}(t)=$	$(\vec{a}_0\vec{a})\,\vec{a}_0$	$[(\vec{a}_1\vec{a})\vec{a}_0 + (\vec{a}_0\vec{a})\vec{a}_1]\,t$	$[\vec{a}_0(\vec{a}_2\vec{a}) + \vec{a}_1(\vec{a}_1\vec{a}) + \vec{a}_2\,(\vec{a}_0\vec{a})]\,t^2$	

Bemerkung: Wie berechnet man beispielsweise die Entwicklung von $\vec{x}^2$?
Regel: "Jeder mit jedem" $\hookrightarrow$ "Cauchyprodukt von Reihen" $\rightharpoonup$Speziell Potenzreihen-. Also:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{a}_o + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 t^2 + ...\right)\left(\vec{a}_o + \vec{a}_1 t + \vec{a}_2 t^2 + ...\right) \\ = \;&\vec{a}_0^2 + 2\,(\vec{a}_0\vec{a}_1)\,t + \left(2\,(\vec{a}_0\vec{a}_2) + \vec{a}_1^2\right)t^2 + ... \end{aligned}$$

Das sollten Sie inzwischen ohne großen zeitlichen Anlauf können!

Nun Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= (\vec{a}_0\vec{a})\,\vec{a}_0\\ 2\vec{a}_2 &= \vec{a}_0^2\vec{a}+[(\vec{a}_1\vec{a})\vec{a}_0+(\vec{a}_0\vec{a})\vec{a}_1]=\vec{a}_0^2\vec{a}+2(\vec{a}_0\vec{a})^2\vec{a}_0\\ 3\vec{a}_3 &= (2\vec{a}_0\cdot\vec{a}_1)\vec{a}+[\vec{a}_0(\vec{a}_2\vec{a})+\vec{a}_1(\vec{a}_1\vec{a})+\vec{a}_2\,(\vec{a}_0\vec{a})]\\ &= \ldots\end{aligned}$$

Die Rekursion läuft offensichtlich mit $\underline{\text{frei vorgebbarem } \vec{a}_0}$.
Übrigens: zwischen freiem und äußerem Parameter unterscheiden! "Jede Wahl von frei liefert ein interessierendes Objekt in der Aufgabe, hier eine Lösung. Jede Wahl eines ä.P. liefert eine eigene zugehörige Aufgabe!"

■ 4) Wir betrachten die Abbildung

$$\left(\mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix}, \mathbb{R}^3\right)$$

a)Für welche **Graphen**punkte ist diese Abbildung nicht lokal umkehrbar?
b) Kann man die Umkehrabbildung rechnerisch gewinnen?

Sei F die gegebene Abbildung. Dann folgt

$$DF(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\det DF(\vec{x}) = 2xyz}.$$

▲ a) Die kritischen Punkte sind daher die drei Koordinatenebenen mit den Bildern ^{t}(x,y,0)$\mapsto (0,0,xy)$ und analog in den beiden anderen Fällen.

$$^t(x,y,0)\mapsto(0,0,xy) \quad {}^t(x,0,z)\mapsto(0,xz,0) \quad {}^t(0,y,z)\mapsto(yz,0,0)$$

Als Bilder erhält man so die gesamten Koordinatenachsen.
▲ b) Man kann hier auch **rechnerisch umkehren**.

$$\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{u=yz}\\ \text{v=xz}\\ \text{w=xy}\end{array}} \rightharpoonup \boxed{\begin{array}{c}\frac{u}{v}=\frac{y}{x}\\ \text{w=xy}\end{array}} \rightharpoonup \boxed{\text{y}^2=\frac{wu}{v}}$$

$$\text{Analog} \quad \text{x}^2 = \frac{vw}{u} \quad \text{und} \quad \text{z}^2 = \frac{uv}{w}$$

So weit war etwa gefragt!
Analog folgt mit $\epsilon=\pm1$ und I=$\{^t(u,v,w)|$ uvw$\neq 0$, u,v,w$\in\mathbb{R}\}$

$$F_\epsilon^{-1} = \left(\mathbb{R}^3 - I, \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon_1\sqrt{\frac{vw}{u}}\\ \epsilon_2\sqrt{\frac{uw}{v}}\\ \epsilon_3\sqrt{\frac{uv}{w}}\end{pmatrix}, \mathbb{R}^3\right)$$

Dabei ist jeweils $\epsilon_i\epsilon_j = sign(u_k)$ - alle Indizes verschieden - zu wählen. Jede so zulässige Vorzeichenkombination gibt eine zugehörige Umkehrabbildung. Einige vergessen immer noch die Bedeutung von lokal. Natürlich gibt es hier **mehrere** Umkehrabbildungen jeweils mit eingeschränktem zugehörigen Defintionsbereich im (u,v,w)-Raum.

■ 5)Berechne $\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ direkt über die Dachproduktdefinition.

▲

$$\begin{array}{rl} & (e_1 2 + e_2 - e_3) \wedge (-e_1 2 + e_2 3 + e_3 2) \\ = & e_1 \wedge e_2 (6+2) + e_1 \wedge e_3 2 + e_2 \wedge e_3 5 \\ & (\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) \wedge (e_1 + e_2 2 + e_3 2) \\ = & e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 (5 - 4 + 16) \end{array}$$

Die Determinante hat den Wert 17. Häufig wurde eine Probe gemacht, allerdings so, als hätten wir nie Methoden zur Berecchnung von Determinanten besprochen.

■ 6) Sei V^4 vierdimensional. Welche Dimension haben die Räume $\wedge V^4$ und $\overset{2}{\wedge} V^4$. Es sei e_0, e_1, e_2, e_3 Basis von V^4. Geben Sie die zugehörige Basis von $\overset{2}{\wedge} V^4$ an.

■ 7) Es sei V eindimensionaler und W n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Welche Dimension hat dann $V \otimes W$? Das legt die Existenz eines Isomorphismus nahe. Geben Sie einen solchen an.

Sei e Basisvektor von V und f_i Basis von W. Dann ist $e \otimes f_i$ Basis von $V \otimes W$. Die Zuordnung $f_i \mapsto e \otimes f_i$ erzeugt dann einen Isomorphismus der beiden Räume.

Anmerkung: Damit folgt

$$\vec{y} \mapsto \Sigma\, (e \otimes f_i)\, y_i = e \otimes \vec{y}$$

D.h.: hält man die einelementige Basis von V fest, dann ist der Isomorphismus kanonisch, unabhängig von der Basiswahl in W.

■ 8) Es sei V endlichdimensionaler Vektorraum und e eine Basis von V. Weiter sei e^* die zugehörige duale Basis. Sei $\vec{x} = \vec{e}_1 3 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 2 \in V$ und $\lambda = e_1^* + e_2^* 2 + e_3^* 3 \in V^*$. Bestimmen Sie den Wert $\langle \lambda | \vec{x} \rangle$ des kanonischen Skalarproduktes.

▲

$\langle \lambda | \vec{x} \rangle = \langle e_1^* + e_2^* 2 + e_3^* 3 | \vec{e}_1 3 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 2 \rangle = 3 + 2 - 6 = -1$

■ 9) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen *Trägheitstensor* und *Trägheitsmoment ?*

▲ θ der Trägheitstensor, T kinetische Energie, $\vec{\omega} = \vec{n}\omega$ Winkelgeschwindigeit, $J = J_{\vec{n}}$ das zur Drehachse $\vec{n}$ gehörige Drehmoment. Dann gilt:

$$T = \frac{1}{2}\theta(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}\theta(\vec{n}, \vec{n})\omega^2 = \frac{1}{2} J_{\vec{n}} \omega^2 .$$

du

■ 10) V_0 endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Es sei B eine symmetrische Bilinearform auf V_0 und λ eine Linearform auf V_0 und $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die neue Abbildung $\boxed{\vec{x} \mapsto r(\vec{x}) = B(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda(\vec{x}) + c.}$ Das ist für $\lambda \neq 0$ keine Bilinearform, aber immer ein Skalarfeld. Uns interessieren die Niveaumengen dieses Feldes.

Dazu nehmen wir einen Ursprungsverschiebung $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$ vor. D.h. wir wollen die Niveaumengen von einem anderen Ursprung aus vektoriell beschreiben. Wir rechnen:

$$\begin{array}{rcl} r(\vec{x}) & = & B(\vec{x}, \vec{x}) + \lambda(\vec{x}) + c \\ & = & B(\vec{y}, \vec{y}) + (2B(\vec{y}, \vec{a}) + \lambda(\vec{y})) + (B(\vec{a}, \vec{a}) + \lambda(\vec{a}) + c)\,. \end{array}$$

Jetzt versuchen wir $\vec{a}$ so zu wählen, dass der mittlere Term verschwindet. Angenommen, das ist möglich. Dann ist

$$r(\vec{x}) = B(\vec{y}, \vec{y}) + (B(\vec{a}, \vec{a}) + \lambda(\vec{a})) = s(\vec{y})$$

Die Niveaumengen von r sind aber bis auf die Paralleverschiebung $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \vec{x} - \vec{a}$ die von s und deren Niveaumengen sind die der Quadrik $\vec{q}(\vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{y})$. Es wird ja nur der Feldwert um eine Konstante verschoben. Und die Niveaumengen der Quadriken sind uns bekannt.

a) Formulieren Sie die **Voraussetzungen** dieser Argumentation.

b) Formulieren Sie das **Resultat**: "Unter den in a) genannten Voraussetzungen gilt:..... Fazit: Damit ist das Problem der Niveaumengenbestimmung von Abbildungen des Typs r zurückgeführt auf.... "

c) Was ist **noch zu beweisen**?

d) Sei V=$\mathbb{R}^2_K$ und (x,y)$\mapsto r(x,y) = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 2$. Was gibt der Satz für diesen Fall und wie führt man den Beweis hier direkt? (Das ist ein bekanntes Resultat der elementaren analytischen Geometrie!)

e) Führen Sie den Beweis allgemein für den Fall, dass B nicht ausgeartet ist, d.h. hier (=bekanntes früheres Resultat): Ist B^K =(B_{ik}) beschreibende Matrix von B bezüglich einer Basis, dann ist B^K invertierbar.

f) Wie wird man die Abbildungen vom Typ r charakterisieren oder bezeichnen? Schreibt man nämlich r in Koordinaten, dann erhält man das allgemeine Polynom ....? in den Koordinaten.

▲ a) Die **Voraussetzungen** dieser Argumentation.

V_0 VR über $\mathbb{R}$ mit dimV<∞ (V1)
B:$V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ symmetrisch (V2) und(V2a)
$\lambda : V_0 \to \mathbb{R}$ Linearform (V3)
r($\vec{x}$) $= B(\vec{x},\vec{x}) + \lambda(\vec{x}) + c$ Bezeichnung r (V4) 86
s($\vec{y}$) $= r(\vec{x} + \vec{a})$ Bezeichnung (V5)
q($\vec{y}$) $= B(\vec{y},\vec{y})$ quadratische Form (V6)
Zusatzbedingung: 2B($\vec{y},\vec{a}$) + $\lambda(\vec{y})$=0 ist lösbar in $\vec{a}$ (V7)

▲ b) Das **Resultat**:

Unter den Voraussetzungen (V1-3), mit einem $\vec{a}$ aus der Zusatzbedingung (V7) und den drei Bezeichnungen (V3-5) gilt: **Die Niveaumengen von r entstehen aus den Niveaumengen von q durch Parallelverschiebung um** $\vec{a}$.

(Und die Niveaumengen von q sind behandelt!)

Intuitive Kurzbeschreibung: "Durch Ursprungswechsel kann man die linearen Feldterme (in $\vec{y}$) zum Verschwinden bringen."

▲ c) Noch zu beweisen ist (V7)

$$\text{Es gibt ein } \vec{a} \in V_0 \text{ mit } 2B(\vec{y},\vec{a}) + \lambda(\vec{y}) = 0 \quad \text{für alle } \vec{y} \in V_0$$

Das ist die Bedingungsgleichung für das zu Null werden der linearen Terme!

▲ d) Das Verschwinden der linearen Terme soll hier an einem einfachen Beispiel durchgerechnet werden. Das geht sofort mit quadratischer Ergänzung, die $\vec{a}$ festlegt:

$$\begin{aligned} r(x,y) &= x^2 + y^2 + 6x - 8y + 2 \\ &= (x+3)^2 + (y-4)^2 + 2 - 9 - 16 \\ &= u^2 + v^2 - 23 \qquad \boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Die Niveaumengen sind um $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ verschobene Kreise!

▲ Zum allgemeinen Beweis:

Sei dazu $\vec{e}_1 .....\vec{e}_n$ Basis von V_0 (Gibt es wegen V1) und $e^*_1, ..e^*_n$ die dazu duale Basis. Man hat (allgemeine Resultate der Vektorraumtheorie)

$$\vec{y} = \Sigma \vec{e}_i y_i \qquad \vec{a} = \Sigma \vec{e}_i a_i \qquad \lambda = \Sigma e^*_i \lambda_i.$$

Einsetzen in die Bedingungsgleichung gibt mit (V2) und $B_{ik} = B(e_i, e_k)$

$$\begin{aligned} 2\Sigma B_{ki} y_k a_i + \Sigma \lambda_k y_k &= 0 \quad \text{für alle } \vec{y}. \\ 2\Sigma_{ki} B_{ki} a_i y_k + \Sigma \lambda_k y_k &= 0 \quad \text{für alle } y_k \quad k=1,..,n \end{aligned}$$

Jetzt wählt man speziell $y_k = \delta_{kr}$. Das gibt

$$2\Sigma_i B_{ri} a_i + \Sigma \lambda_r = 0 \text{ r=1,2,..,n.}$$

Oder als Matrixgleichung

$$2B^K \vec{a}^K + \vec{\lambda}^K = \vec{0}$$

Nun sollte aber B^K invertierbar sein, was eine eindeutige Lösung $\vec{a}^K$ ergibt und damit auch ein eindeutiges $\vec{a}$.

Anmerkung: Das Beispiel der Parabel $y=x^2$ zeigt, dass es ausgeartete Fälle gibt, für die es nicht möglich ist, den linearen Term zu beseitigen.