Klausur Höhere Mathematik III   6.1.2004

■ 1) Ein Massepunkt bewegt sich unter dem Einfluss einer räumlichen Oszillatorkraft.
a) Wie lautet die zugehörige Lagrangefunktion? (Korrekte Schreibweise)
b) Wieso ist "die" Lagrangefunktion keine ganz korrekte **Formulierung**?
c) Welche der üblichen Erhaltungssätze gelten und wieso? (Inspektion)
d) Wie lauten die zugehörigen Energiefelder $\bar{\mathrm{H}}$ und H?

■ 2) Für ein eindimensionales System sei $\boxed{\mathrm{L(t,x,v)}=\frac{-a}{x+v}}$ (a äußerer Parameter).

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Beschreibungsgrößen p und $\bar{\mathrm{H}}$ sowie die Euler-Lagrange-Gleichung des Systems

Zur **Rechenkompetenz**: Rechnen Sie eines der beiden nachfolgenden Probleme durch:

b1) Bestimmen Sie die Extremalen des Problems und darunter alle, die (t_0, x_0) mit $(\mathrm{t}_1 x_1)$ verbinden, wobei $\mathrm{t}_0 \neq t_1$ ist. Hinweis: Nicht über den Energiesatz. Inspektion der ELG legt eine Substitution nahe, die direkt zu einer anderen Erhaltungsgröße führt! Man erhält elementar lösbare Differentialgleichungen

b2) Bestimmen Sie das Energiefeld H(t,x,p). Bestimmen Sie dann die Extremalen über die kanonischen Gleichungen und alle die $(\mathrm{t}_1 x_1)$ mit $(\mathrm{t}_2 x_2)$ verbinden.

■ 3) Das Ende eines ebenen Pendels werde auf einer horizontalen Stange unter dem Einfluss der Schwerkraft sinusförmig hin und herbewegt. Führen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate ein und bestimmen Sie eine zugehörige Lagrangefunktion und die ELG. Hinweise: Ein Beitrag ist eine reine Zeitfunktion. Was bedeutet das? Versuchen Sie es mit $\boxed{\vec{r}(\mathrm{t})=\vec{e}_1 \mathrm{A}\sin\omega\mathrm{t}+\mathrm{L}(\vec{e}_1\cos\alpha(\mathrm{t})\text{-}\vec{e}_2\sin\alpha(\mathrm{t}))}$ Skizze dazu!

■ 4) Es sei $(\mathrm{E},\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum, wobei $\mathfrak{A}$ Algebra über E und μ Maß auf $\mathfrak{A}$ ist. Es gelte $\mu(E) = 5$. Weiter sei A,B$\in\mathfrak{A}$ mit $\mathrm{A}\cup B = E$.

a) Was läßt sich dann über die beiden Zahlen $\mu(A)$ und $\mu(B)$ ausagen? (Also: Welche mathematische Beziehung muß zwischen ihnen bestehen? Beweis?)

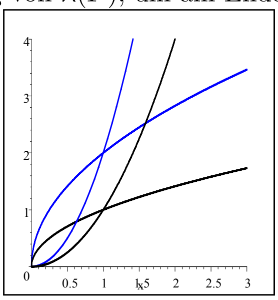
b) Was läßt sich aussagen, wenn $\mu(\mathrm{E})=\infty$ ist?

■ 5) Sei $\vec{w} = (w_1, w_2, .., w_N) \in \mathbb{R}^N$ mit $0\leq w_i \leq 1$ und i=1,2,..,N. Dazu betrachten wir das Funktional $\mathrm{H}(\vec{w}) = -\Sigma_{i=1}^N w_i \ln(w_i)$. Für welche Vektoren $\vec{w}$ wird H unter der Nebenbedingung $\Sigma_{i=1}^N w_i = 1$ extremal? Für w=0 ist wlnw als 0 zu interpretieren. Die Anwendung des allgemeinen Schemas liefert sofort eine Bedingung, deren Lösung Sie per Inspektion sehen sollten! Dann können Sie auch den Rest durch fallspezifische Inspektion klären.

■ 6) Berechnen Sie für $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\mathrm{r}^2 = x^2 + y^2$ die Divergenz. Weiter sei $\mathrm{Q}_1(\varepsilon, R) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$ mit $0<\varepsilon < R$. Was folgt, wenn man mit dem gefundenen Resultat für die Divergenz in den Gausschen Satz eingeht?

■ 7) In der Figur sind 4 Graphen skizziert, die durch folgende Gleichungen festgelegt sind: $\mathrm{y=x}^2$ und $\mathrm{y=2x}^2$ und $\mathrm{x=y}^2$ und $4\mathrm{x=y}^2$. Identifizieren Sie diese 4 Graphen. Sie bestimmen ein rombenförmiges Flächenstück R, dessen Flächeninhalt bestimmt werden soll.

Führen Sie dazu neue Koordinaten (u,v) wie folgt ein: $\boxed{\mathrm{u}=\frac{y^2}{x} \text{ und } \mathrm{v}=\frac{x^2}{y}}$. Das Flächenstück wird im u-v-Raum zu einem Rechteck, nämlich $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ und $1\leq u \leq 4$. Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda(F)$ jetzt mit Hilfe der Substitutionsregel. Denken Sie daran, dass Sie zunächst (x,y) durch (u,v) ausdrücken müssen! Schätzen Sie zunächst die Größenordnung von $\lambda(F)$, um am Ende das Resultat vergleichen zu können.



Kommentierte Lösungen und Ergebnisse

■ 1) Ein Massepunkt bewegt sich unter dem Einfluss einer räumlichen Oszillatorkraft.
a) Wie lautet die zugehörige Lagrangefunktion? (Korrekte Schreibweise)
b) Wieso ist "die" Lagrangefunktion keine ganz korrekte Formulierung?
c) Welche der üblichen Erhaltungssätze gelten und wieso? (Inspektion)
d) Wie lauten die zugehörigen Energiefelder $\bar{\mathrm{H}}$ und H?

▼ a) Konfigurationsraum V_0^3 :

$$L(t,\vec{x},\vec{v}) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - \frac{k}{2}\vec{x}^2$$

b) L ist durch das physik. System (nicht *Problem!)* nicht eindeutig bestimmt. Versch. Lagrangefunktionen führen zu denselben ELG. Vgl. Skript!

c) Energierhaltung (L hängt nicht von t ab) **und** Drehimpulserhaltung (Das Potential hängt nur von $r=|\vec{x}|$ ab. Siehe Übung, Noether!)

d) Vorzeichen pot, Energie!!!

$$\begin{aligned}\bar{H}(t,\vec{x},\vec{v}) &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{k}{2}\vec{x}^2 \\ H(t,\vec{x},\vec{p}) &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\vec{x}^2\end{aligned}$$

▲

■ 2) Für ein eindimensionales System sei $\boxed{L(t,x,v)=\frac{-a}{x+v}}$ (a äußerer Parameter).
a) Bestimmen Sie die zugehörigen Beschreibungsgrößen p und $\bar{\mathrm{H}}$ sowie die Euler-Lagrange-Gleichung des Systems
Zur Rechenkompetenz: Rechnen Sie eines der beiden nachfolgenden Probleme durch:
b1) Bestimmen Sie die Extremalen des Problems und darunter alle, die (t_0, x_0) mit $(t_1 x_1)$ verbinden, wobei $t_0 \neq t_1$ ist. Hinweis: **Nicht** über den Energiesatz. Inspektion der ELG legt eine Substitution nahe, die direkt zu einer anderen Erhaltungsgröße führt!
b2) Bestimmen Sie das Energiefeld H(t,x,p) und daraus die kanonischen Gleichungen des Systems (Endform)

▼ a) Impuls und Energiefeld:

$$\begin{aligned}p &= \frac{a}{(x+v)^2} = -\frac{1}{a}L^2 \\ \bar{H}(t,x,v) &= \frac{av}{(x+v)^2} + \frac{a}{x+v} = a\frac{x+2v}{(x+v)^2}\end{aligned}$$

b1) Die **ELG:**

$$\frac{d}{dt}\frac{a}{(x(t)+v(t))^2} - \frac{a}{(x(t)+v(t))^2} = 0$$

Oder unter Verwendung des verallg. Impulses: $\boxed{\dot{p}(t) = p(t)}$!!!

★ Aber man kann -sollte vielleicht - hier noch weiter rechnen:

$$\begin{aligned}(-2)\frac{\dot{x}(t)+\dot{v}(t)}{(x(t)+v(t))^3} - \frac{1}{(x(t)+v(t))^2} &= 0 \\ (-2)(\dot{x}(t)+\ddot{x}(t)) - (x(t)+\dot{x}(t)) &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t)+\tfrac{3}{2}\dot{x}(t)+\tfrac{1}{2}x(t)=0}$$

Gleichung vom Oszillatortyp mit zwei reellen Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ und allgemeiner Lösung

$$\boxed{\mathrm{x}_{cd}(\mathrm{t})=\mathrm{c}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + de^{-t} \qquad \text{c,d frei!}}$$

★ Der vorgeschl. erste Weg, der meist gegengen wurde : Setze $\boxed{\mathrm{u(t)}=(v(t)+x(t))^{-2}}$ (also u=p!)

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) - u(t) &= 0 \\ u(t) &= Ce^t \qquad \text{C frei!} \\ \dot{x}(t) + x(t) &= Ce^{-\frac{1}{2}t} \qquad \text{(Rückeinsetzen, Schar v. Differentialgl.)} \end{aligned}$$

Faustregel! Ansatz $\mathrm{x}_s(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}$ gibt

$$A(-\frac{1}{2}+1) = C \qquad \boxed{\mathrm{A=2C}}$$

Allgemeine Lösung erneut gefunden:

$$\boxed{\mathrm{x}_{cd}(\mathrm{t})=2\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}} \qquad \text{C,d frei!}$$

Oder in Anfangswertform:

$$x_{\gamma\delta}(t) = \gamma e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)} + \delta e^{-(t-t_0)}$$

★ Den AW (t_1, x_1) einbauen

$$\begin{aligned} x_1 &= 2ce^{-\frac{1}{2}t_1} + de^{-t_1} \\ \underline{d} &= e^{t_1}\left[x_1 - 2ce^{-\frac{1}{2}t_1}\right] = \underline{x_1 e^{t_1} - 2ce^{\frac{1}{2}t_1}} \end{aligned}$$

Also (noch c frei!)

$$x_c(t) = 2ce^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t}\left[x_1 e^{t_1} - 2ce^{\frac{1}{2}t_1}\right] = e^{-t+t_1}x_1 + 2c\left[e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t+\frac{1}{2}t_1}\right]$$

Oder leichter mit $\gamma + \delta = x_1$

$$\boxed{\mathrm{x}_\gamma(\mathrm{t})=\gamma\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-t_1)}+(\mathrm{x}_1\text{-}\gamma)\mathrm{e}^{-(t-t_1)}} \qquad \gamma \quad \text{frei.}$$

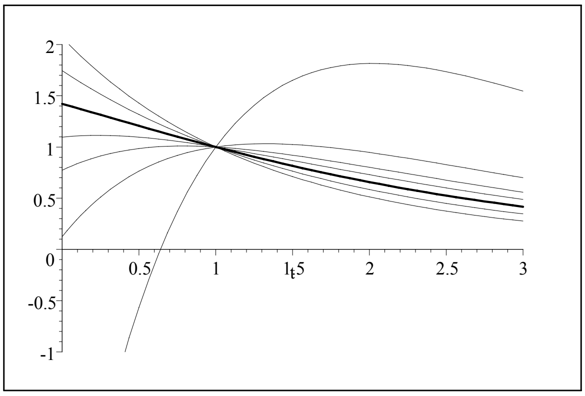
★ Und jetzt der Endpunkt (t_2, x_2)

$$\begin{aligned} x_2 &= e^{t_1-t_2}x_1 + 2c\left[e^{-\frac{1}{2}t_2} - e^{-t_2+\frac{1}{2}t_1}\right] \\ 2c &= \frac{x_2 - e^{t_1-t_2}x_1}{e^{-\frac{1}{2}t_2} - e^{-t_2+\frac{1}{2}t_1}} = \frac{x_2 e^{t_2} - x_1 e^{t_1}}{e^{\frac{1}{2}t_2} - e^{\frac{1}{2}t_1}} \end{aligned}$$

$$x_{verb}(t) = x_1 e^{t_1} + \frac{x_2 e^{t_2} - x_1 e^{t_1}}{e^{\frac{1}{2}t_2} - e^{\frac{1}{2}t_1}}\left[e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t+\frac{1}{2}t_1}\right]$$

Wenn in einem Endresultat ein freier Parameter auftritt, dann sollten Sie das notieren! Das ist relevant.

★ Einige Beispiele der durch den AW (1,1) hindurchgehenden Extremalenschar. Fett für c=1. c=5 ist der herausfallende Graph



★ b2) Der Weg über die **kanonischen Gleichungen**

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{a}{(x+v)^2} = -\frac{1}{a}L^2 \\
\bar{H}(t,x,v) &= \frac{av}{(x+v)^2} + \frac{a}{x+v} = a\frac{x+2v}{(x+v)^2}
\end{aligned}
$$

$$x+v = \sqrt{\frac{a}{p}} \qquad \text{v=-x+}\sqrt{\frac{a}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
H(t,x,p) &= a\frac{x+2\left(\text{-x+}\sqrt{\frac{a}{p}}\right)}{\frac{a}{p}} = p\frac{-x+2\sqrt{\frac{a}{p}}}{1} = -px+2\sqrt{ap} \\
& \boxed{\text{(H(t,x,p)=-px+2}\sqrt{ap}}
\end{aligned}
$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = -p \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = -x + \sqrt{\frac{a}{p}} = \dot{x}$$

Das gibt die alte Gleichung des ersten Weges. Also $\boxed{\text{p(t)=ke}^{-t}}$.

und ẋ(t)+x(t)=$\sqrt{ake^{-t}} = ce^{-\frac{1}{2}t}$ Der Rest wie oben!

In der Aufgabe wurde es wieder deutlich: An der zusammenfassenden Darstellung eines Endresultates oder Zwischenresultates haben viele von Ihnen kein Interesse! Aller möglicher Quatsch wird notiert, nur nicht das eigentliche Resultat!

■ 3) Das Ende eines ebenen Pendels werde auf einer horizontalen Stange unter dem Einfluss der Schwerkraft sinusförmig hin und herbewegt. Führen Sie eine geeignete verallgemeinerte Koordinate ein und bestimmen Sie eine zugehörige Lagrangefunktion und die ELG..

Hinweis: Versuchen Sie es mit $\boxed{\vec{r}\text{(t)=}\vec{e}_1\text{Asin}\,\omega\text{t+L(}\vec{e}_1\cos\alpha\text{(t)-}\vec{e}_2\sin\alpha\text{(t))}}$ Skizze dazu!

▼ Die Winkelwahl ist etwas unphysikalisch, da es sich um den Winkel mit der horizontalen Achse handelt. Man könnte besser ψ mit $\alpha = -\frac{\pi}{2} + \psi$ nehmen, sollte aber darauf hinweisen!. Aber für den Lagrangeformalismus ist das irrelevant.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_1\left(A\omega\cos\omega t - L\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t)\right) - \vec{e}_2 L\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) = \vec{v}(t)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}^2(t) &= (A\omega\cos\omega t - L\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t))^2 + \dot{\alpha}^2(t)L^2\cos^2\alpha(t)\\ &= A^2\omega^2\cos^2\omega t - 2AL\omega\dot{\alpha}(t)\cos\omega t\sin\alpha(t) + \dot{\alpha}^2(t)L^2\end{aligned}$$

Der erste Term ist eine reine Zeitfunktion und kann fortgelassen werden. Es folgt

$$\begin{aligned}L(t,\alpha(t),\dot{\alpha}(t)) &= \frac{m}{2}L^2\dot{\alpha}^2(t) - m\omega AL\cos\omega t\cdot\dot{\alpha}(t)\sin\alpha(t) - mgL\sin\alpha(t)\\ L(t,\alpha,\dot{\alpha}) &= \frac{m}{2}L^2\dot{\alpha}^2 - (mAL\omega\cos\omega t)\,\dot{\alpha}\sin\alpha - mgL\sin\alpha = 0\end{aligned}$$

Also

$$\frac{d}{dt}\left(L\dot{\alpha}(t) - A\omega\cos\omega t\cdot\sin\alpha(t)\right) + A\omega\cos\omega t\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) + g\cos\alpha(t) = 0$$

$$\boxed{\mathrm{L}\ddot{\alpha}(\mathrm{t})+\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega \mathrm{t})\sin\alpha(\mathrm{t})+\mathrm{g}\cos\alpha(\mathrm{t})=0}$$

$$\boxed{\mathrm{L}\ddot{\psi}(\mathrm{t})+\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega \mathrm{t})\cos\psi(\mathrm{t})+\mathrm{g}\sin\psi(\mathrm{t})=0}$$

Oder - wobei wir gleich noch mit der Differentialgleichung für das kreisförmig getriebene Pendel aus Kap. 7.0 vergleichen:

$$\boxed{\ddot{\alpha}(\mathrm{t})+\frac{A\omega^2}{L}\sin(\omega \mathrm{t})\sin\alpha(\mathrm{t})+\frac{g}{L}\cos\alpha(\mathrm{t})=0}$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) + \frac{R\omega^2}{L}\sin(\theta(t) - \omega t) + \frac{g}{L}\cos\theta(t) = 0.}$$

▲

■ 4) Es sei (E,$\mathfrak{A}$,μ) ein Maßraum, wobei $\mathfrak{A}$ Algebra über E und μ Maß auf $\mathfrak{A}$ ist. Es gelte $\mu(E) = 5$. Weiter sei A,B$\in\mathfrak{A}$ mit A$\cup B = E$.

a) Was läßt sich dann über die beiden Zahlen $\mu(A)$ und $\mu(B)$ ausagen? (Also: Welche mathematische Beziehung muß zwischen ihnen bestehen? Beweis?)

b) Was läßt sich aussagen, wenn μ(E)=∞ ist?

▼ (*) Wir wissen X$\subset Y$ ergibt μ(X)$\subset\mu(Y)$.

Setze S=A$\cap B$. Dann ist E=A$\cup(B-S)$. disjunkt. Also 5=μ(A)+μ(B-S). Ebenso ist μ(B)=μ(B-S)+μ(S). Alle diese Mengen liegen in der Algebra. Zusammen

$$\begin{aligned}5 &= \mu(E) = \mu(A) + \mu(B-S) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(S)\\ &\boxed{\mu(\mathrm{A})+\mu(\mathrm{B})=5+\mu(\mathrm{S})}\\ 5 &\leq \mu(A) + \mu(B) \leq 10.\end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung wird nicht vorausgestzt, dass A und B disjunkt sind, wie mehrfach angenommen! ▲

■ 5) Sei $\vec{w} = (w_1, w_2, .., w_N) \in \mathbb{R}^N$ mit 0$\leq w_i \leq 1$ und i=1,2,..,N. Dazu betrachten wir das Funktional H($\vec{w}$) $= -\Sigma_{i=1}^N w_i\ln(w_i)$. Für welche Vektoren $\vec{w}$ wird H unter der Nebenbedingung $\Sigma_{i=1}^N w_i = 1$ extremal? Für w=0 ist wlnw als 0 zu interpretieren. Die Anwendung des allgemeinen Schemas liefert sofort eine Bedingung, deren Lösung Sie per Inspektion sehen sollten! Dann können Sie auch den Rest durch fallspezifische Inspektion klären.

▼ K($\vec{w}$) $= -\Sigma\,(w_i\ln w_i + \lambda w_i)$ Das Funktional

K$'_i(\vec{w})$ = 1lnw$_i + 1 + \lambda = 0$ für i=1,2,..,N (Ableitungsbedingung)

Also alle w$_i = -1 - \lambda$. Nur ein Wert. w$_1 = w_2 = ... = w_N$ Die Nebenbedingung gibt $\boxed{\mathrm{w}_i=\frac{1}{N}}$, Das ist das glatte Extremum. Wir haben 0$\leq H(\vec{w})$. Also: Gefundener Wert gibt ein Maximum und w$_i$ = 0 für i$\neq k$ und w$_k$ = 1 gibt N absolute Minima mit Wert 1. (Sonst kann der Wert Null nicht angenommen werden!

Es sollte nicht nur formal wie ein kleines Maschinchen gerechnet werden, sondern ein Sachverhalt war zu klären. Die Extremwerte existiern, werden angenommen, weil es eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge vorliegt!!!

▲

■ 6) Berechnen Sie für $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $r^2 = x^2+y^2$ die Divergenz. Weiter sei $Q_1(\varepsilon,R) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | \varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ mit $0<\varepsilon<R$. Was folgt, wenn man mit dem gefundenen Resultat für die Divergenz in den Gausschen Satz eingeht?

▼ Für $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt:

$$div\vec{v}(x,y) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 = \left(-2x^2r^{-4}+r^{-2}\right) + \left(-2y^2r^{-4}+r^{-2}\right) = -2\frac{x^2+y^2}{r^4} + 2r^{-2} = 0$$

Also liegt die Situation des Vorbereitungsblattes vor. Allerdings ist das Integral stets Null.

Gemeint war eigentlich noch zusätzlich $x,y \geq 0$. Dann gibt der Gaussche Satz:

Man hat $0=\int_{Q_1} d^2x div\vec{v}(\vec{x}) = \int_{\partial Q_1} d\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x})$ wobei $\vec{n}(\vec{x})$ die äußere Normale ist. Es liegt hier ein Integral vom "Hyperflächentyp" vor, wie im Skriptum besprochen und zwar für dimV=n=2. D.h. n-1=1. Nicht etwa ein übliches Kurvenintegral, obwohl über eine Kurve integriert wird.

Der Gaussche Satz besagt hier, dass der Fluss durch den Kreis immer denselben Wert $2\pi R \cdot \frac{1}{R}$ hat unabhängig vom Radius.

Wieder - die Divergenz ausrechnen, das klappt. Aber dann über die Bedeutung nachdenken, da hört es vielfach sofort aus!!!

■ 7) In der Figur sind 4 Graphen skizziert, die durch folgende Gleichungen festgelegt sind: $y=x^2$ und $y=2x^2$ und $x=y^2$ und $4x=y^2$. Identifizieren Sie diese 4 Graphen. Sie bestimmen ein rombenförmiges Flächenstück R, dessen Flächeninhalt bestimmt werden soll.

Führen Sie dazu neue Koordinaten (u,v) wie folgt ein: $\boxed{u=\frac{y^2}{x} \text{ und } v=\frac{x^2}{y}}$. Das Flächenstück wird im u-v-Raum zu einem Rechteck, nämlich $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ und $1 \leq u \leq 4$. Berechnen Sie den Flächeninhalt $\lambda(F)$ jetzt mit Hilfe der Substitutionsregel. Denken Sie daran, dass Sie zunächst (x,y) durch (u,v) ausdrücken müssen! Schätzen Sie zunächst die Größenordnung von $\lambda(F)$, um am Ende das Resultat vergleichen zu können.

▼

$$\begin{array}{lllll} u=\frac{y^2}{x} & xu=y^2 & xu=\frac{x^4}{v^2} & uv^2=x^3 & x=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \\ v=\frac{x^2}{y} & yv=x^2 & yv=\frac{y^4}{u^2} & u^2v=y^3 & y=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \quad \text{Determinante} \quad \frac{1}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3} \qquad \boxed{\Delta=\frac{1}{3}}$$

$$\int_F d^2x1 = \int_1^4 du \int_{\frac{1}{2}}^1 dv\frac{1}{3} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Bemerkung: Die angeführte Methode führt auch leicht zum Ziel, wenn man etwa $y=2x^2$ durch $y=px^2$ ersetzt. Dann wird die Berechnung ohne Substitution viel mühsamer. In unserem Fall liegen beide Schnittpunkte bei x=1, so dass man auch wie folgt rechnen kann:

Die 4 Schnittpunkte liegen unten bei $(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}})$ und (1,1) und oben bei (1,2) und $(4^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{2}{3}})$. Daher kann man das Integral ohne Substitution auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \int_F d^2x1 &= \int_{2^{-\frac{2}{3}}}^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2x^2} dy + \int_1^{4^{\frac{1}{3}}} dx \int_{x^2}^{2\sqrt{x}} dy \\ &= \int_{2^{-\frac{2}{3}}}^1 dx\left(2x^2-\sqrt{x}\right) + \int_1^{4^{\frac{1}{3}}} dx\left(2\sqrt{x}-x^2\right) == \frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

wobei einige Zwischenrechnungen ausgelassen sind.

▲

(Vorläufige) sehr unbefriedigende **Punkteverteilung:** (Maximum ca 40)

							x					
							x					
				n		x	x	x				AF
				n	x	x	x	x		x		TK
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39